Рыбаков Александр Борисович
Кандидат физико-математических наук, учитель физики гимназии №144 г. Санкт-Петербург.

«Конус трения» в задачах статики

В статье описывается графический метод решения задач о равновесии тел под действием силы трения. На многих примерах показывается, что решение таких задач графическим методом с помощью «конуса трения» намного короче, проще и нагляднее, чем при стандартном подходе.

Введение

В школьном курсе задачи статики обычно решают стандартным методом: записываются уравнения, выражающие два условия равновесия, и решается получившаяся система уравнений.

Напомним, что по первому условию равновесия векторная сумма всех сил, действующих на тело, должна быть равна нулю:

$$\sum_i \vec{F}_i = 0, \qquad (1)$$

по второму – сумма моментов всех сил (относительно любой оси) должна быть равна нулю:

$$\sum_i M_i = 0. \qquad (2)$$

В настоящей статье мы на многих примерах продемонстрируем другой – графический – метод решения задач статики. Этот метод основывается на следующих соображениях.

Сначала скажем о том, что следует из условия (1). Напомним, что векторы можно складывать как по правилу параллелограмма, так и по правилу треугольника. При сложении большого числа векторов, конечно, удобнее последовательно пользоваться правилом треугольника. В этом случае начало следующего вектора примыкает к концу предыдущего, а результатом сложения является вектор, соединяющий начало первого из складываемых векторов с концом последнего. Теперь мы можем сформулировать следующее очевидное правило: чтобы выполнялось первое условие равновесия, многоугольник, возникающий при векторном сложении сил, должен быть замкнутым.

Теперь предположим, что на тело действуют только три силы (никакой потери общности такое предположение не содержит, ведь любую систему сил можно свести к указанному случаю, последовательно попарно заменяя силы их равнодействующей). Очевидно, что линии действия этих трёх сил должны пересекаться в одной точке, иначе мы могли бы легко указать точку, относительно которой условие (2) не выполняется (можно считать, что параллельные силы тоже пересекаются – в бесконечности).

Что такое конус трения?

Сейчас мы должны вывести на сцену главного героя нашего рассказа – конус трения.

Пусть тело покоится, касаясь некоторой поверхности (не обязательно горизонтальной) в какой-то точке O (рис. 1).

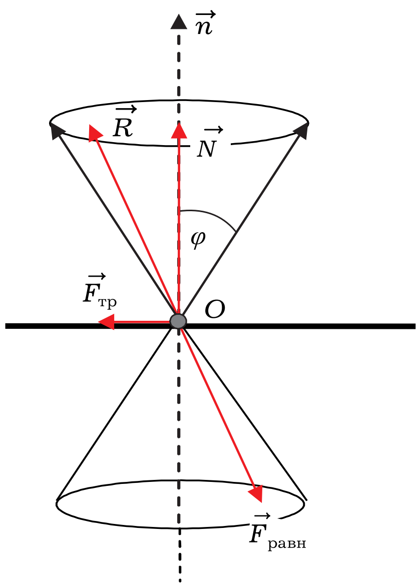

Рис. 1

Речь может идти как о материальной точке, так и о той точке пространственного тела конечных размеров, в которой это тело касается поверхности. Восстановим в точке касания тела нормаль $\vec{n}$ (т. е. перпендикуляр) к поверхности. На тело со стороны поверхности действуют, как мы знаем, две силы: направленная по нормали сила упругости, которую обычно называют силой нормальной реакции $\vec{N}$, и сила трения покоя $\vec{F}_{\text{тр}}$, направленная по касательной к поверхности. Введём в рассмотрение силу полной реакции поверхности:

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{F}_{\text{тр}}. \qquad (3)$$

Теперь поставим самый главный для нас вопрос: какой угол может составлять в равновесии сила $\vec{R}$ с нормалью $\vec{n}$?

Ясно, что тангенс интересующего нас угла равен отношению $F_{\text{тр}}/N$. А это отношение максимально, когда сила трения покоя принимает своё максимальное значение μN (будем ниже называть такую ситуацию критической). Будем называть угол между $\vec{n}$ и $\vec{R}$ в этом случае *углом трения* φ (см. рис. 1). Легко видеть, что

$$\operatorname{tg}\varphi = \mu. \qquad (4)$$

Это условие выделяет в пространстве область, которую называют конусом трения. Итак, в состоянии равновесия сила полной реакции $\vec{R}$ всегда лежит внутри конуса трения, а в критическом случае – на конусе.

Конечно, к телу приложены ещё какие-то другие силы, кроме $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$ (ну хотя бы сила тяжести), назовём их равнодействующую $\vec{F}_{\text{равн}}$ (см. рис. 1). Ясно, что в равновесии линия действия этой силы должна проходить через точку O. Но этого мало – $\vec{F}_{\text{равн}}$ должна проходить внутри конуса трения (ибо только в этом случае она будет уравновешена силой полной реакции). Заметим, что при выполнении последнего условия никакое увеличение силы $F_{\text{равн}}$ не может вывести тело из равновесия.

Конечно, при рассмотрении плоских задач мы будем иметь дело с сечением конуса трения плоскостью рисунка – т. е. с плоским углом. Но не будем менять терминологию – будем всё-таки говорить о конусе.

Теперь продемонстрируем преимущества графического метода с использованием конуса трения перед стандартным методом на целом ряде задач. Большинство рассмотренных в статье задач слишком широко известны, чтобы указывать какой-то определённый источник.

Во всех случаях рекомендуем читателю сравнить предлагаемое нами решение со стандартным подходом.

Но сначала сделаем небольшое отступление и напомним одну совсем простую теорему элементарной геометрии. Кажется, в последнее время эта теорема куда-то подевалась из школьного курса. Вот она: углы со взаимно перпендикулярными сторонами равны, если они оба острые (рис. 2) или оба тупые.

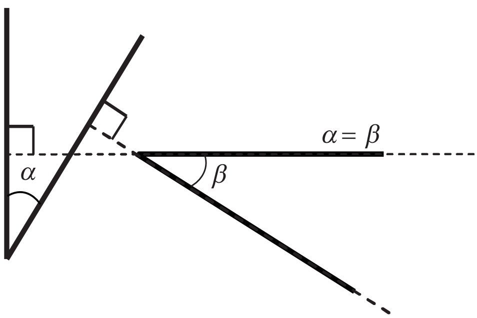

Рис. 2

Наши заключения о равенстве углов везде ниже основаны именно на этой теореме.

Начнём с совсем простого примера.

Пример. Пусть тело массы m лежит на горизонтальной плоскости. На какой угол к горизонту надо наклонить плоскость, чтобы оно начало скользить?

Ответ на этот вопрос всем, конечно, хорошо известен. Мы лишь предлагаем взглянуть на него с новой точки зрения.

Легко видеть, что угол наклона плоскости к горизонту α равен углу между направлениями нормали к плоскости и силы тяжести (рис. 3).

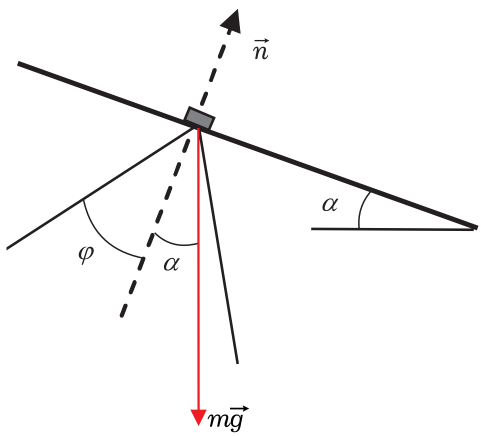

Рис. 3

Чем больше угол наклона плоскости к горизонту, тем ближе подходит сила тяжести изнутри к поверхности конуса. При $\alpha = \varphi$ мы имеем критическую ситуацию, при $\alpha > \varphi$ равновесие невозможно.

Задачи с трением о стенку

Ещё две простые задачи.

Задача 1. Шар подвешен на нити к стене так, что точка подвеса C и центр шара O лежат на одной вертикали. При каком минимальном коэффициенте трения между шаром и стеной это возможно?

Решение. Укажем на рисунке 4 все силы, приложенные к шару: силу тяжести $m\vec{g}$, силу натяжения нити $\vec{F}_{\text{н}}$ и силу полной реакции стенки $\vec{R}$.

Линии действия сил $m\vec{g}$ и $\vec{F}_{\text{н}}$ пересекаются в точке подвеса C, значит, и линия действия $\vec{R}$ должна проходить через точку C, т. е. составлять с нормалью в точке касания шарам стенки угол 45°. В соответствии с (4) минимальныйкоэффициент трения, при котором это возможно, $\mu = 1$. Вот и всё решение.

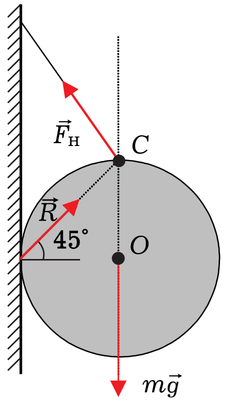

Рис. 4

Усложним немного эту задачу.

Задача 2. Катушка подвешена к стене за нить, намотанную на ось катушки. Нить составляет со стеной угол α (рис. 5). Радиус оси катушки r, а «щёчек» – ρ. При каком минимальном коэффициенте трения между «щёчками» катушки и стеной это возможно?

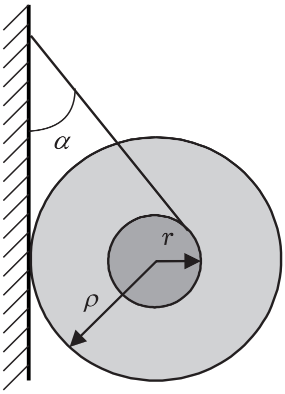

Рис. 5

Указание. Решение во многом аналогично решению задачи 1. Ответ приведён в конце статьи.

Рассмотрим ещё ряд задач, сгруппировав их по темам, которые затрагиваются в школьном курсе.

Задачи о равновесии тела на плоскости

Задача 3. Гиря массы m лежит на полу. Её пытаются сдвинуть, натягивая привязанную к гире верёвку (рис. 6). Коэффициент трения μ. Какой минимальной силой $\vec{F}$ можно сдвинуть гирю? Как она должна быть направлена?

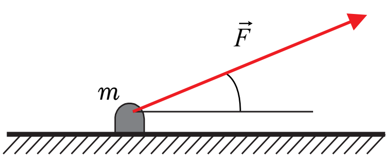

Рис. 6

Решение. При стандартном подходе для решения этой задачи записывают проекцию уравнения (1) в критическом случае на горизонтальное и вертикальное направления для произвольного угла наклона верёвки. Из получившейся системы уравнений находят выражение для силы натяжения верёвки, а потом ищут, при каком угле наклона достигается минимум этого выражения. А поскольку при изучении статики ученики ещё не владеют методами поиска экстремума при помощи производных, то для поиска минимума приходится прибегать к весьма специальным приёмам – и решение получается весьма громоздким.

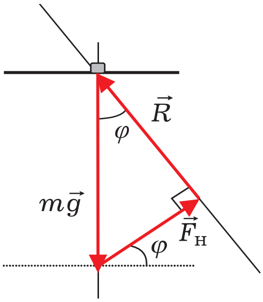

Рис. 7

Мы пойдём другим путём!

В критическом случае (а именно он нас и интересует) $\vec{R}$ должна составлять с вертикалью угол трения φ (рис. 7).

Сила тяжести известна нам и по величине, и по направлению. Сила натяжения веревки $\vec{F}_н$ должна замкнуть треугольник из этих трёх сил. Ясно, что сила натяжения будет минимальна по величине, если она перпендикулярна к линии действия силы $\vec{R}$, т. е. составляет с полом угол, равный углу трения φ. По величине она при этом равна

$$F_н = mg\sin\varphi. \qquad (5)$$

И опять скажем: вот и всё решение!

Можно выразить $\sin\varphi$ через $\mathrm{tg}\,\varphi$ и, учитывая (4), окончательно записать ответ в виде

$$F_н = \frac{\mu mg}{\sqrt{1+\mu^2}}.$$

В дальнейшем мы не будем в решениях задач повторять те моменты, которые уже описаны выше.

Задача 4. (Физфак МГУ, 1996). По наклонной плоскости, образующей угол α с горизонтом, равномерно втягивают за верёвку ящик массой M (рис. 8). Коэффициент трения μ. Под каким углом к плоскости γ следует тянуть верёвку, чтобы двигать ящик с минимальным усилием?

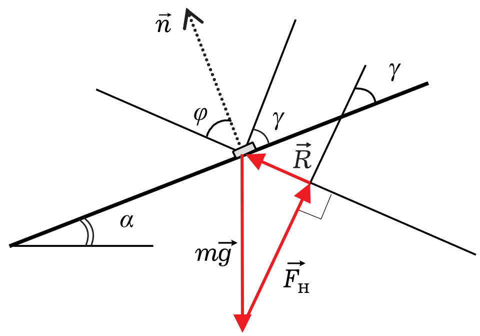

Рис. 8

Решение. Решение лишь мелкими деталями отличается от решения задачи 3 и вполне ясно из рисунка. Поэтому избежим пояснений. Искомый угол γ равен углу трения φ.

Задачи о равновесии лестницы

Будем по традиции говорить именно о лестнице, хотя можно было бы вести речь о доске или каком-то стержне.

Вот задача, которую, кажется, никогда не обходят стороной в школьном курсе.

Задача 5. Лестница прислонена к гладкой стене. Коэффициент трения между лестницей и полом μ. Какой наибольший угол α может составлять лестница с вертикалью?

Решение. Укажем на рисунке 9 все силы, приложенные к лестнице: $m\vec{g}$, силу нормальной реакции стены $\vec{N}_{ст}$ и силу полной реакции пола $\vec{R}$. Линии действия $m\vec{g}$ и $\vec{N}_{ст}$ пересекаются в точке C.

Значит, и линия действия $\vec{R}$ должна проходить через эту точку.

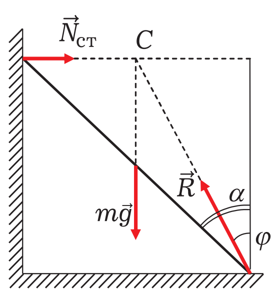

Рис. 9

Поскольку нас интересует критический случай, то $\vec{R}$ составляет с нормалью угол φ. Легко видеть, что $\mathrm{tg}\,\alpha = 2\mathrm{tg}\,\varphi$, т. е.

$$\mathrm{tg}\,\alpha = 2\mu. \qquad (6)$$

Вот и всё решение.

Теперь будем усложнять этот сюжет во всех возможных направлениях.

Задача 6. Маляр поднимается по лёгкой лестнице длины L, которая прислонена к гладкой стене и образует угол α с вертикалью. Какой максимальный путь l может пройти маляр по лестнице? Коэффициент трения между лестницей и полом μ.

Решение. Решение лишь некоторыми мелкими деталями отличается от решения задачи 5. Мы вполне можем воспользоваться и предыдущим рисунком. Надо лишь учесть, что теперь внешняя сила (вес маляра $M\vec{g}$) приложена не к центру лестницы. Как и выше, линия действия полной реакции пола проходит через точку пересечения линий действия $M\vec{g}$ и $\vec{N}_{\text{ст}}$, и в последней точке, до которой сможет дойти маляр, она составляет с вертикалью угол трения φ. Так что в этом случае

$$\mu = \operatorname{tg}\varphi = \frac{l\sin\alpha}{L\cos\alpha} = \frac{l}{L}\operatorname{tg}\alpha,$$

откуда имеем

$$l = \frac{\mu L}{\operatorname{tg}\alpha}. \qquad (7)$$

Конечно, (7) можно применять лишь для $l \le L$.

Из (7) видно, что минимальный коэффициент трения, при котором маляр сможет подняться до конца лестницы, равен $\operatorname{tg}\alpha$.

А почему мы не начали формулировку условия задачи так: «Лёгкая лестница стоит у стены»?

Из формулы (7) видно, что равновесие лестницы со стоящим на ней маляром возможно и при таком α, когда $\operatorname{tg}\alpha > 2\mu$, т. е. когда лестница сама по себе (без маляра) стоять не может. Но маляр в этом случае должен стоять достаточно низко.

К заметным сложностям не приводит и отказ от пренебрежения массой лестницы по сравнению с массой человека. Если лестница без человека находится в равновесии, то при появлении человека на нижней половине лестницы равновесие не нарушится, так как в этом случае равнодействующая силы тяжести лестницы и веса маляра всегда будет приложена ниже середины лестницы.

Задача 7. Лестница длины L стоит у гладкой стены под углом α к вертикали. По ней поднимается маляр, масса которого в n раз больше массы лестницы. При каком минимальном коэффициенте трения между лестницей и полом μ маляр сможет подняться до конца лестницы?

Решение. Точка приложения равнодействующей двух параллельных сил – силы тяжести лестницы и веса человека, стоящего на её конце, – отстоит от середины лестницы на расстояние

$$d = \frac{L}{2}\cdot\frac{n}{n+1}. \qquad (8)$$

Если воспользоваться рисунком к задаче 6, сдвинув точку пересечения сил ближе к стене в соответствии с (8), то легко получить, что

$$\mu = \frac{2n+1}{2(n+1)}\cdot\operatorname{tg}\alpha. \qquad (9)$$

Как всегда, стоит проверить выполнение частных случаев.

Когда массой маляра можно пренебречь по сравнению с массой лестницы, т. е. $n \ll 1$, (9) переходит в (6), как и должно быть.

Пренебрежение массой лестницы даёт нам условие $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. Этот результат получен нами выше при обсуждении (7).

Задача 8. Лестница нижним концом соприкасается с гладким полом, а верхним – с шероховатой наклонной плоскостью. Угол наклона плоскости к горизонту α. При каком минимальном коэффициенте трения возможно равновесие лестницы?

Решение. На лестницу в этом случае действуют три силы: $m\vec{g}$, нормальная реакция пола $\vec{N}_n$ и полная реакция наклонной плоскости $\vec{R}$ (рис. 10).

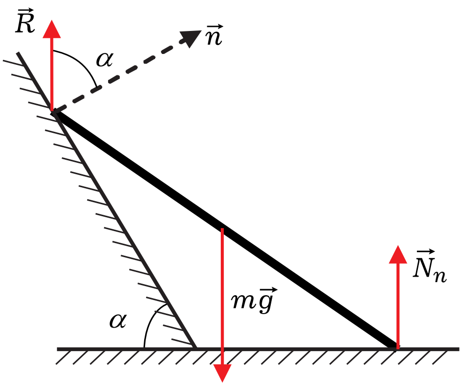

Рис. 10

Силы $m\vec{g}$ и $\vec{N}_n$ направлены по вертикали, значит, так же направлена и $\vec{R}$. Угол между $\vec{R}$ и нормалью к плоскости равен α. Следовательно, минимальный коэффициент трения, при котором равновесие лестницы возможно, задается условием $\operatorname{tg}\alpha = \mu$, т. е. $\alpha = \varphi$.

Заметим, что это условие совпадает с условием равновесия тела на наклонной плоскости (что вполне можно было предвидеть заранее).

Задача 9. Лестница стоит у шероховатой стены. Коэффициент трения между лестницей и полом μ_1, а между лестницей и стеной μ_2. Какой наибольший угол может составлять лестница с вертикалью?

Указание. Обратим внимание на принципиальный момент: лестница начнёт проскальзывать, когда нарушатся условия равновесия и в точке контакта с полом, и в точке контакта со стеной. Поэтому в критическом случае линии действия полной реакции стенки и полной реакции пола пересекаются в точке, лежащей на линии действия $m\vec{g}$. Остальное – «мелкая геометрия». Ответ приведён в конце статьи.

А теперь задача о стремянке. Напомним, что стремянка – это две одинаковые лестницы, соединённые вверху шарнирно.

Задача 10. Стремянка стоит на полу, лёгкие лестницы образуют с вертикалью угол α, на середине одной из лестниц стоит человек. Пусть коэффициент трения о пол μ постепенно уменьшается. При каком μ и каким именно образом нарушится равновесие?

Решение. Обсудим равновесие каждой лестницы (рис. 11). На левую лестницу действует в шарнире некая

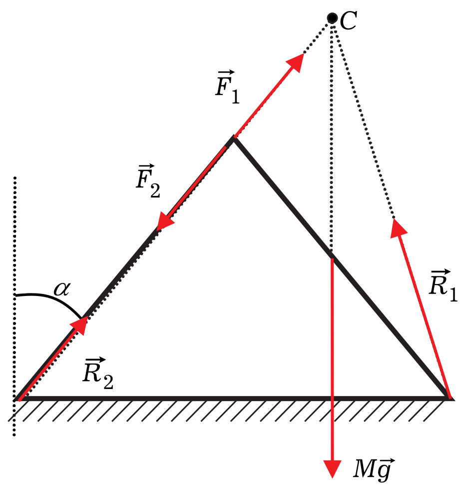

Рис. 11

сила $\vec{F}_2$ со стороны правой лестницы и сила полной реакции пола $\vec{R}_2$ (так как весом лестницы мы пренебрегаем). $\vec{F}_2$ должна быть направлена вдоль лестницы, иначе её момент относительно точки контакта с полом не был бы равен 0. Следовательно, и $\vec{R}_2$ направлена вдоль лестницы. Для правой лестницы (на которой стоит человек массой M) ситуация иная: на неё в шарнире действует сила $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$, и линия действия полной реакции пола $\vec{R}_1$ должна проходить выше лестницы (только тогда её момент относительно шарнира сможет уравновесить момент веса человека).

Итак, в состоянии равновесия сила $\vec{R}_2$ составляет больший угол с вертикалью, чем $\vec{R}_1$. Поэтому при уменьшении коэффициента трения условие равновесия нарушится для левой лестницы, и она начнёт скользить по полу. Ясно, что в критическом случае $\mathrm{tg}\alpha = \mu$. Впрочем, в быту стремянки без дополнительной связи между лестницами не используются.

Задачи на заклинивание

Задача 11. При каком коэффициенте трения μ лёгкий клин, заколоченный в бревно, не выскакивает? Угол при вершине клина α.

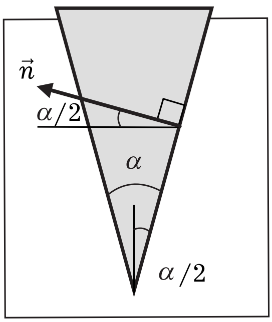

Рис. 12

Решение. Чтобы клин не выскакивал, сумма сил полной реакции должна быть направлена вниз, в критическом случае – по горизонтали. Легко видеть, что нормаль к поверхности клина составляет с горизонталью угол $\alpha/2$ (рис. 12). Поэтому

$$\mu = \mathrm{tg}\frac{\alpha}{2}.$$

Пожалуй, известную задачу о трёх брёвнах тоже можно рассматривать как задачу на заклинивание. Вот она.

Задача 12. На земле лежат вплотную друг к другу два одинаковых цилиндрических бревна (рис. 13). Сверху между ними кладут такое же бревно. При каком коэффициенте трения μ между брёвнами они не раскатятся? По земле брёвна не скользят.

Решение. Пусть C – это центр нижнего бревна, пусть верхнее и нижнее брёвна соприкасаются в точке A. В критическом случае линия действия

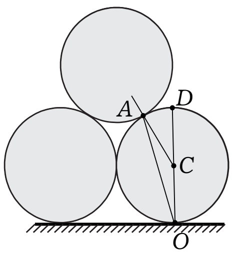

Рис. 13

силы полной реакции, действующей на нижнее бревно, должна проходить через точку O, в которой это бревно касается земли, то есть $\mu = \mathrm{tg}\angle AOC$.

Отрезок AC при продолжении пройдёт через центр верхнего бревна, значит, он составляет угол 60° с горизонталью, следовательно, $\angle ACD = 30^\circ$. Но $\angle ACD$ – внешний угол равнобедренного треугольника ACO, поэтому $\angle AOC = 15^\circ$, и окончательно $\mu = \mathrm{tg}15^\circ$.

Задача 13. Лёгкая доска лежит на гладкой поверхности. На доску нижним концом опирается массивный стержень, который шарнирно закреплён в верхней точке. Стержень составляет с вертикалью угол α. Коэффициент трения между доской и стержнем μ. При каком угле наклона доску не удастся сдвинуть вправо никакой горизонтальной внешней силой?

Решение. Разложим полную силу реакции доски $\vec{R}$, приложенную к стержню, на две составляющие специальным образом: на перпендикулярную к стержню силу $\vec{R}_\perp$ и продольную $\vec{R}_{пр}$ (см. рис. 14). Именно момент силы $\vec{R}_\perp$ должен компенсировать момент силы тяжести стержня относительно точки подвеса. Значит, во всех состояниях равновесия $\vec{R}_\perp$ одна и та же. Иначе говоря, конец вектора $\vec{R}$ всё время лежит на пунктирной прямой AB (рис. 14), параллельной стержню.

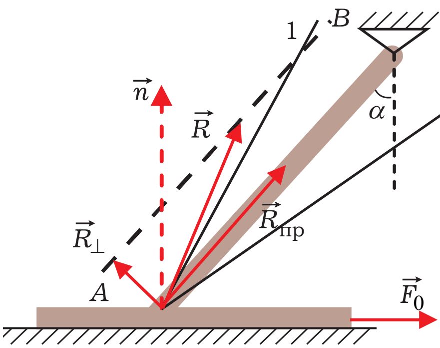

Рис. 14

Рассмотрим сначала случай, когда $\varphi < \alpha$. Граница конуса трения – прямая 1 на рисунке. Будем прикладывать к доске внешнюю силу $\vec{F}_0$, направленную вправо. Когда мы будем её увеличивать, будет увеличиваться и сила трения покоя между доской и концом стержня (т. е. горизонтальная составляющая вектора $\vec{R}$). При этом вектор $\vec{R}$ меняется весьма специальным образом: его конец, как уже сказано выше, скользит по прямой AB, т. е. увеличивается угол между $\vec{R}$ и нормалью. В конце концов $\vec{R}$ выйдет из конуса трения, и доска начнёт скользить вправо.

Не так обстоит дело при $\varphi \geq \alpha$. Граница конуса трения в этом случае – прямая 2. В этом случае при увеличении внешней силы F_0 сила R бесконечно увеличивается, но из конуса трения никогда не выйдет. Т. е. даже бесконечно большой внешней силой доску не удастся привести в движение! Эта ситуация называется заклиниванием.

Конечно, вопрос о том, что в реальности произойдёт с такой системой при бесконечном увеличении внешней силы (сломается ли стержень, изогнётся или начнёт подпрыгивать), лежит за рамками статики.

Ответы и решения

Задача 2. Ясно, что сила натяжения нити $\vec{F}_н$ направлена по касательной к поверхности катушки (рис. 15).

Поэтому сила тяжести $m\vec{g}$ и $\vec{F}_н$ пересекаются в точке, отстоящей по вертикали от оси катушки на расстояние $r/\sin\alpha$, через эту точку должна проходить и сила полной реакции стенки $\vec{R}$, поэтому

$$\mu = \operatorname{tg}\varphi = \frac{r}{\rho \sin\alpha}.$$

Задача 9. Приведём ответ:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2\mu_1}{1 - \mu_1\mu_2}.$$

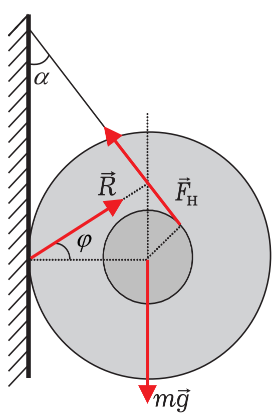

Рис. 15