раженное от экрана площадью порядка квадратного метра, имеем киловаттную печь! Следовательно, для получения такого же потока от льдины при температуре, скажем, –3°C (270 К), потребуется площадь отражающей поверхности $S = \left(\frac{6000}{270}\right)^4 \cdot 1\text{м}^2 \approx$ $\approx 25 \cdot 10^4$ м^2. Отсюда радиус отражателя $R = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \approx 300$ м.

Конечно, отвод тепла конвекцией от подогреваемого тела увеличивается при отличии его температуры от температуры окружающей среды. Это можно было бы компенсировать добавкой площади отражателя. Однако, на какой же высоте окажутся чайник и фокус такого устройства (параболоида или сферического зеркала)! – подумал рыбак, но тут пошел клев.

Удачного улова!

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

Как найти ошибку

М.БОНДАРОВ

Как известно, от ошибок никто не застрахован. Даже те, кто глубоко понимают физику, даже величайшие ученые.

В 1905 году в своей докторской диссертации Альберт Эйнштейн предложил новый теоретический метод определения радиуса молекул и постоянной Авогадро. Диссертация была утверждена, и Эйнштейн стал доктором. Как выяснилось позднее, ни сам Эйнштейн, ни его оппонент не заметили одну серьезную ошибку в вычислениях. Лишь через несколько лет обнаружить эту, как пишет один из биографов Эйнштейна [1], «элементарную, но не тривиальную» ошибку удалось потому, что результаты эксперимента расходились со значениями, полученными из выведенного в диссертации уравнения.

В данной статье речь пойдет не о случаях из истории физики, а об ошибках, возникающих у школьников при решении физических задач на ЕГЭ, олимпиадах и других испытаниях. При этом будем предполагать, что ученик сумел успешно разобраться в физических закономерностях поставленной перед ним задачи, выписал все уравнения, необходимые для решения, но в процессе выхода на конечный результат допустил ошибку в математических преобразованиях или вычислениях. И теперь главной его проблемой становится выявление и устранение допущенной ошибки. Мы остановимся только на анализе буквенных ответов. К каждой задаче будет предложено несколько возможных ответов, среди которых непременно есть верный.

Итак, наша цель – суметь распознать все неверные ответы *без непосредственного решения задачи*, полагаясь только на глубокое понимание сути закономерностей процессов, описываемых в условии. Вот «имена» главных помощников в достижении этой цели: **размерность, симметрия, частный случай.**

Начнем с задачи, для решения которой достаточно знаний семиклассника.

Задача 1. *Гонщик едет на мотоцикле по шоссе и ориентируется по телеграфным столбикам, которые тянутся вдоль шоссе. Гонщик последовательно «скачком» переходит на скорости v_1, v_2, v_3, v_4, когда проезжает мимо очередного столбика. Чему равна средняя скорость $v_{ср}$ мотоцикла?*

Способ решения задачи хорошо известен. Пусть расстояние между столбиками равно l. Тогда средняя скорость $v_{ср}$ определяется как отношение всего пути $4l$ ко времени t его прохождения, где $t = l/v_1 + l/v_2 + l/v_3 + l/v_4$. Другими словами, осталось лишь разделить $4l$ на $\left(l/v_1 + l/v_2 + l/v_3 + l/v_4\right)$, сократить на l и цель достигнута:

$$v_{ср} = \frac{4}{\frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2} + \frac{1}{v_3} + \frac{1}{v_4}}. \quad (*)$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20240905

Математические ошибки могут появиться, если возникает желание продолжить преобразования, чтобы уменьшить «этажность» дроби. Вот некоторые из возможных ответов, среди которых нужно выбрать единственный верный:

A. $v_{\text{ср}} = \dfrac{4v_1v_2v_3v_4}{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}$;

B. $v_{\text{ср}} = \dfrac{4v_1v_2v_3v_4}{v_1v_2v_3 + v_1v_2v_4 + v_1v_3v_4}$;

C. $v_{\text{ср}} = \dfrac{4v_1v_2v_3v_4}{v_1v_2v_3 + v_1v_2v_4 + v_1v_3v_4 + v_2v_3v_4}$;

D. $v_{\text{ср}} = \dfrac{v_1v_2v_3v_4}{v_1v_2v_3 + v_1v_2v_4 + v_1v_3v_4 + v_2v_3v_4}$.

Как правило, обычно первыми отбрасываются ответы **A** и **B**. Очевидно, что ответ **A** не проходит проверки на *размерность*. В самом деле, левая часть этой формулы имеет размерность скорости (м/с), а правая – размерность куба скорости $(\text{м/с})^3$. В ответе **B** бросается в глаза его *несимметричность*. Заметим, что в знаменателе этой дроби величина v_1 встречается 3 раза, а величины v_2, v_3 и v_4 – только по 2 раза. Но в условии задачи все скорости равноправны, так что ни одна из них не должна выделяться в ответе. Обобщим это наблюдение: *если в условии задачи имеется некоторая симметрия, то определенная симметрия должна непременно проявляться в ответе*.[1] В случае **B** такого не наблюдается, и этот ответ не может быть верным.

Таким образом, у нас остаются лишь два последних ответа, каждый из которых успешно прошел проверку на размерность и симметрию. Рассмотрим теперь такой *частный случай*, когда ответ очевиден. Пусть гонщик на всех участках имеет одну и ту же скорость $v_1 = v_2 = v_3 = v_4 = v$, которая в этом случае, очевидно, равна средней скорости. Заменим все скорости в ответах **C** и **D** на одинаковые и равные v. В итоге получим верное $v_{\text{ср}} = v$ для ответа **C** и противоречащее здравому смыслу выражение $v_{\text{ср}} = v/4$ для ответа **D**.

[1] Поучительный случай с опытным наборщиком физического текста, обнаружившим без решения задачи ошибку в ответе, описан в статье [2].

Итак, все ошибочные ответы отброшены и нами найден верный ответ **C**. Аккуратно проведя математические преобразования, убедимся в том, что из формулы (*) получается именно ответ **C**.

Наблюдательный читатель, несомненно, заметил, что среди возможных ответов нет самого распространенного неверного ответа:

E. $v_{\text{ср}} = \dfrac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4}$.

Это не случайно, ведь мы собираемся рассматривать только те ответы, которые получены не случайно (наугад), а в результате глубокого понимания физических процессов, описываемых в задаче, правда, при наличии математических ошибок. Очевидно, что записанные в решении уравнения едва ли могут привести к ответу **E**.

И все же попробуем провести анализ и убедиться, что ответ **E** не может быть верен. Снова нам поможет частный случай: пусть на первых трех участках скорость гонщика остается постоянной: $v_1 = v_2 = v_3 = v$, а на последнем она очень мала: $v_4 \to 0$. Какова при этом должна быть средняя скорость мотоциклиста на всем пути? Очевидно, что за счет малой скорости v_4 время t движения становится очень большим (в пределе оно стремится к бесконечности: $t \to \infty$). Значит, из определения средней скорости ($v_{\text{ср}} = s/t$) следует, что она должна быть, как и v_4, тоже очень мала. Обратим внимание, что при $v_4 \to 0$ в случае верного ответа **C** средняя скорость тоже оказывается очень малой. Зато ответ **E** дает в этом случае неправдоподобный результат: $v_{\text{ср}} = 3v/4$. (Ясно, что для анализа можно было предположить малой скорость на любом другом участке.)

Рассмотрим еще одну задачу на расчет средней скорости, где участки пути имеют разную длину.

Задача 2. *Треть всего пути автомобиль проехал со скоростью v_1, а остальное – со скоростью v_2. Какова была средняя скорость $v_{\text{ср}}$ автомобиля?*

Возможные ответы:

A. $v_{\text{ср}} = \dfrac{2v_1v_2}{v_1 + v_2}$;

B. $v_{\text{ср}} = \dfrac{v_1 + 2v_2}{3}$;

C. $v_{\text{ср}} = \dfrac{2v_1 + v_2}{3v_1v_2}$;

D. $v_{\text{ср}} = \dfrac{3v_1v_2}{2v_1 + v_2}$;

E. $v_{\text{ср}} = \dfrac{3v_1v_2}{v_1 + 2v_2}$.

Анализ ответов в этой задаче проводим аналогично предыдущему. Начиная с проверки *размерности*, нетрудно заметить, что в случае **C**, решая задачу, в конечном выражении, видимо, забыли перевернуть дробь. Поэтому данный ответ не может быть верен. Единственный симметричный ответ **A** не подходит, поскольку *симметрия* отсутствует в условии и, следовательно, ее не должно быть в ответе. Ответ **B** отбрасывается по той же причине, что и ответ **E** в предыдущей задаче: в случае очень малой скорости, к примеру на первом участке, средняя скорость тоже должна быть очень мала. Однако при подстановке в формулу $v_1 \to 0$ имеем $v_{\text{ср}} = 2v_2/3$, а не $v_{\text{ср}} \to 0$.

Остается сделать выбор между двумя похожими ответами **D** и **E**, которые успешно прошли все испытания, позволившие выявить ошибочность трех первых ответов. Увы, не поможет нам и частный случай равенства скоростей, который выручил в прошлой задаче. В самом деле, при $v_1 = v_2 = v$ обе формулы дают верный результат: $v_{\text{ср}} = v$. Что же, попробуем еще один *частный случай*: очень большую скорость на втором участке (в предельном случае $v_2 \to \infty$). Тогда в знаменателе формулы **D** можно пренебречь малой величиной $2v_1$ по сравнению с очень большой v_2, что приводит к ответу

$$v_{\text{ср}} = \frac{3v_1v_2}{2v_1 + v_2} \approx \frac{3v_1v_2}{v_2} = 3v_1.$$

Убедимся, что именно ответ **D** должен оказаться верным в нашем частном случае. Треть пути автомобиль двигался медленно, а затем следующие две трети промчался почти мгновенно, практически не затратив на это время. Иными словами, в этом случае за время, которое затрачивает автомобиль, двигаясь на первом участке со скоростью v_1, на прохождение первой трети пути l, автомобиль сумеет преодолеть весь путь $3l$. Для этого, очевидно, его скорость $v_{\text{ср}}$ должна быть втрое больше, чем скорость v_1 на первой трети пути.

Проведите аналогичные рассуждения для формулы **E** самостоятельно и покажите, что это приводит к ошибочному результату $3v_1/2$.

Проверим теперь наши выводы, основанные на анализе ответов, решив задачу. Пусть весь путь равен $3l$, а все время равно t. Тогда средняя скорость

$$v_{\text{ср}} = \frac{3l}{t} = \frac{3l}{\dfrac{l}{v_1} + \dfrac{2l}{v_2}} = \frac{3v_1v_2}{2v_1 + v_2}.$$

Все верно.

Итак, мы убедились в том, что рабочими инструментами по обнаружению возможных ошибок в ответах (впрочем, и в промежуточных формулах тоже) являются три главных способа проверки: размерность, симметрия и частный случай. Среди них, несомненно, важнейшим является первый: размерность. С его помощью обнаруживаются наиболее грубые ошибки.

И тут, наверное, уместно сделать такое замечание. Едва ли найдется хотя бы один ученик, который станет складывать свой рост и температуру. В то же время при решении задач ошибки в размерностях встречаются довольно часто. При этом в некоторых случаях для их обнаружения не требуется больших усилий. Приведем лишь несколько подобных выражений, которые доводилось встречать практически каждому, проверявшему работы учеников:

$$1)\ s + v/t;\ 2)\ m - M^2;$$
$$3)\ I + R/U;\ 4)\ (F - m)a.$$

Очевидно, что проверка размерности должна быть вашим непременным спутником, если вы хотите безошибочно решить задачу.

Отметим, что прохождение всех рассмотренных выше проверок не гарантирует верности ответа. Эти проверки лишь позволяют отбрасывать неверные ответы. Но, согласитесь, это тоже очень полезно.

Перейдем теперь к задаче для девятиклассников.

Задача 3. *Найдите силу T натяжения нити между грузами 2 и 3 в системе, изображенной на рисунке 1. Массы грузов известны, массой блока пренебречь. Трение отсутствует. Ускорение свободного падения равно g.*

Возможные ответы:

A. $T = \dfrac{2m_1m_3g}{m_1 + m_2 + m_3}$;

B. $T = \dfrac{2m_1m_2g}{m_1 + m_2 + m_3}$;

C. $T = \dfrac{m_1m_3g}{m_1 + m_2 + m_3}$;

D. $T = \dfrac{(m_1 + m_2 + m_3)g}{2}$;

E. $T = \dfrac{2m_1m_3g}{m_1 - m_2 - m_3}$.

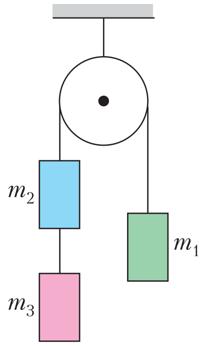

Рис. 1

Два первых способа проверки, удачно использованных нами в предыдущих задачах, на сей раз, увы, не помогают. Остается одна надежда – на удачно выбранный *частный случай*.

В каком случае нить между грузами 2 и 3 перестанет быть натянутой? Во-первых, если убрать груз массой m_3: тогда нить нечему натягивать. Во-вторых, при удалении груза m_1 второй и третий начнут свободно падать, и нить снова не будет натянутой. Выходит, что $T = 0$ при $m_1 = 0$ и $m_3 = 0$; значит, в числителе дроби должно быть произведение m_1m_3. Этой проверке противоречат ответы **B** и **D** – отбрасываем их. В случае **E** обратим внимание на «минусы» в знаменателе: они всегда должны вызывать некоторую тревогу у проверяющего ответ на достоверность. В самом деле, пусть грузы слева от блока имеют такую же суммарную массу, что и груз справа, т.е. $m_2 + m_3 = m_1$. Тогда, согласно выражению **E**, нить должна быть натянута бесконечно большой силой. Как известно, таких сил в системе грузов не может быть – удаляем еще один ответ.

Вновь остаются два ответа, различающихся совсем чуть-чуть. А что если вновь попробовать предположение $m_2 + m_3 = m_1$? В этом случае ускорение в системе отсутствует, а нижняя нить будет натянута силой $T = m_3g$. Именно это получается в ответе **A**, в то время как ответ **C** дает неверный результат $T = m_3g/2$. Впрочем, можно было применить и другой прием. Представим, что справа подвешен очень тяжелый груз ($m_1 \to \infty$). Тогда легкие левые грузы не смогут мешать ему практически свободно падать с ускорением g. При этом сами они будут подниматься с тем же по модулю ускорением (нити нерастяжимы). А чтобы груз массой m_3 поднимался с ускорением g, нить должна быть натянута с силой $T = 2m_3g$. Подставив $m_1 \to \infty$ в формулы **A** и **C**, убеждаемся, что это верно только для ответа **A**.

Для проверки наших рассуждений решим задачу. Пусть a – ускорение грузов, T^* – натяжение второй нити. Тогда по второму закону Ньютона $m_3a = m_3g - T$, $m_2a = m_2g + T - T^*$, $m_1a = T^* - m_3g$. Решая эту систему, получим верный ответ **A**.

Мы еще не рассматривали специфику электрических задач. Пора перейти к одной из них для десятиклассников.

Задача 4. *Два резистора сопротивлениями R_1 и R_2 и два конденсатора емкостями C_1 и C_2 подключены к источнику постоянного напряжения U, как показано на рисунке 2.*

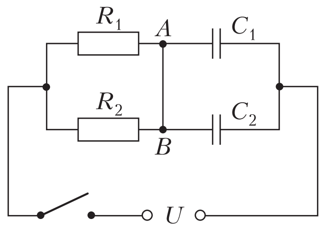

Рис. 2

Какой заряд Δq протечет через проводник AB за достаточно большой промежуток времени после замыкания ключа, если конденсаторы были первоначально разряжены?

Возможные ответы:

A. $\Delta q = \dfrac{C_2R_2 + C_1R_1}{R_1 + R_2}U$;

B. $\Delta q = \dfrac{C_1R_2 + C_2R_1}{R_1 - R_2}U$;

C. $\Delta q = \dfrac{(C_2 - C_1)R_1R_2}{R_1 + R_2}U$;

D. $\Delta q = \dfrac{C_2R_2 - C_1R_1}{R_1 + R_2}U$;

E. $\Delta q = \dfrac{C_2R_1 - C_1R_2}{R_1 + R_2}U$.

Как обычно, начнем с проверки на размерность, и она сразу выдает нам первый из неверных ответов: **C**. Далее. Обращает на себя внимание «минус» в знаменателе ответа **B**. Ясно, что при $R_1 = R_2$ (да и ни в каком другом случае!) по участку AB не может протечь бесконечно большой заряд.

В каком же случае заряд не будет течь через перемычку AB? Очевидно, что это случится, если цепь окажется симметричной, т.е. станут одинаковыми как сопротивления резисторов, так и емкости конденсаторов. Тогда при подстановке в конечную формулу $R_1 = R_2$ и $C_1 = C_2$ должно получиться $\Delta q = 0$. Этому не удовлетворяет ответ **A** – отбрасываем его.

Остаются два последних ответа: **D** и **E**. Заменим первый резистор идеальным проводом $(R_1 = 0)$. Тогда весь заряд, прошедший через него, проследует далее через проводник AB на конденсатор емкостью C_2. Этому условию удовлетворяет ответ **D**, поскольку при подстановке в него $R_1 = 0$ имеем $\Delta q = C_2U$. В то же время аналогичная подстановка в ответ **E** дает неверный результат: $\Delta q = C_1U$.

Заметим, что в схемах с резисторами и конденсаторами полезно использовать также два других предельных случая: $C = 0$, когда конденсатор отсутствует, и $R \to \infty$, когда отсутствует проводник. Попробуйте самостоятельно использовать их для того, чтобы из двух последних ответов выбрать верный.

Вновь убедимся в правильности наших выводов, основанных только на анализе ответов, решив задачу. После окончания зарядки ток прекратится и на параллельно соединенных конденсаторах накопятся заряды C_1U и C_2U. Значит, через резисторы протечет суммарный заряд $q = (C_1 + C_2)U$. Резисторы соединены параллельно, поэтому прошедшие через них заряды должны быть обратно пропорциональны сопротивлениям: $q_1 = qR_2/(R_1 + R_2)$ и $q_2 = qR_1/(R_1 + R_2)$. Следовательно, в направлении от точки A к точке B через проводник протечет заряд

$$\Delta q = q_1 - C_1U = (C_2R_2 - C_1R_1)U/(R_1 + R_2),$$

что совпадает с ответом **D**.

Рассмотренные примеры показывают, что проверки на размерность, симметрию и частный случай могут эффективно служить для обнаружения ошибок при решении различных физических задач. Эти приемы, действительно, являются основными. Правда, иногда только с их помощью все ошибки в ответах обнаружить не удается. Тогда в нашем арсенале анализа ответов должны появиться другие приемы; полезно обращать внимание в ответах также на *характер зависимости, корни, неопределенности*.

Перейдем к рассмотрению подобных задач и начнем с задачи для девятиклассников.

Задача 5. *Пассажир первого вагона поезда длиной l прогуливается по перрону. Когда он был рядом с последним вагоном, поезд начал двигаться с ускорением a. Пассажир сразу же побежал со скоростью v. Через какое время t он догонит свой вагон?*

Возможные ответы:

A. $t = \dfrac{v}{a}\sqrt{1 - \dfrac{2al}{v^2}}$;

B. $t = \dfrac{v}{a}\sqrt{1 + \dfrac{2al}{v^2}}$;

C. $t = \dfrac{v}{a}\left(1 - \sqrt{1 - \dfrac{2al}{v^2}}\right)$;

D. $t = \dfrac{v}{a}\left(1 + \sqrt{1 - \dfrac{2al}{v^2}}\right)$;

E. $t = \dfrac{v}{a}\left(1 - \sqrt{1 + \dfrac{2al}{v^2}}\right)$;

F. $t = \dfrac{v}{a}\left(1 + \sqrt{1 + \dfrac{2al}{v^2}}\right)$.

Ответы, на первый взгляд, очень похожи. Размерность и симметрия нам здесь не помогут. Придется исследовать предельные ситуации. В условиях задачи могут меняться только три физические величины: длина поезда l, его ускорение a и скорость пассажира v. Попробуем поработать с одной из них; к примеру, начнем мысленно уменьшать длину поезда до нуля $(l \to 0)$. Тогда пассажир в начальный момент времени уже находится около своего вагона, следовательно, искомое время $t = 0$. Этому противоречат все ответы, кроме **C** и **E**. Нам очень повезло и с помощью только одного предельного перехода удалось выявить сразу четыре неверных ответа.

Приглядимся теперь повнимательнее к оставшимся ответам. Ответ **E** не может быть верным и вот почему. Во-первых, обратим внимание на *характер зависимости* искомого времени t от длины поезда l. Очевидно, что с уменьшением l непременно должно уменьшаться t, но по формуле **E** все должно быть наоборот. Во-вторых, подкоренное выражение больше 1, поэтому при любых значениях входящих в условие величин время будет отрицательным.

Итак, все неверные ответы успешно найдены. Однако не будем торопиться: есть еще некоторые интересные моменты, о которых полезно упомянуть. Обратим внимание, что в подкоренном выражении величины a и l стоят рядом. А что если с ускорением a проделать те же действия, что и с длиной l? Если начать уменьшать ускорение a, то время будет расти снова во всех ответах, кроме **C** и **E**. И это вновь противоречит физическому смыслу. Рассмотрим формулу **C** на предмет предельного перехода $a \to 0$. После подстановки получается выражение, называемое в математике *неопределенностью* вида 0/0.

Заметим, что еще с одним видом неопределенности нам пришлось бы столкнуться, если бы мы стали исследовать зависимость искомого времени от скорости v пассажира. Пусть эта скорость начнет неограниченно расти ($v \to \infty$). И снова все ответы, кроме **C** и **E**, дадут противоречащий физическому смыслу ответ $t \to \infty$ и поэтому должны быть отброшены. В оставшихся ответах выражение в скобках стремится к нулю, а множитель перед скобками – к бесконечности. На сей раз мы столкнулись с другим видом неопределенности: $\infty \cdot 0$. Как поступить в подобной ситуации? Можно использовать, например, известное соотношение $\sqrt{1 \pm x} = 1 \pm \frac{x}{2}$, справедливое при малых x ($x \to 0$). Тогда в случае ответа **C** получим

$$t = \frac{v}{a}\left(1 - \sqrt{1 - \frac{2al}{v^2}}\right) \approx \frac{v}{a}\left(1 - \left(1 - \frac{2al}{2v^2}\right)\right) = \\ = \frac{v}{a}\frac{al}{v^2} = \frac{l}{v}.$$

Отсюда сразу видно, что при очень большой скорости время становится очень малым, как и должно быть в реальности. Отметим также, что чисто формально в этой задаче верен также ответ **D**.

При решении задачи нужно приравнять координаты пассажира $x_1 = vt$ и первого вагона $x_2 = l + \frac{at^2}{2}$, после чего получится квадратное уравнение $\frac{at^2}{2} - vt + l = 0$, решением которого будут два корня, соответствующие ответам **C** и **D**. Ясно, что время из ответа **D** соответствует той ситуации, когда пассажир пробежит мимо двери своего вагона, но затем вагон снова догонит его.

И еще одно важное замечание. При решении задачи мы предполагали, что пассажир непременно догонит свой вагон. Однако при скорости пассажира $v < \sqrt{2al}$ этого не случится. В конечной формуле обязательно должно быть отражено, что только при достаточно большой скорости (в нашем случае, при $v \ge \sqrt{2al}$) пассажир догонит свой вагон.

Рассмотрим еще одну задачу для десятиклассников.

Задача 6. *Вертикально расположенная трубка длиной l, открытая с обоих концов, наполовину погружена в сосуд с ртутью. Трубку закрывают пальцем и вынимают из ртути. Чему равна длина x столбика ртути, оставшейся в трубке? Атмосферное давление уравновешивается столбом ртути высотой H. Процесс считать изотермическим.*

Возможные ответы:

A. $x = \frac{H + l - \sqrt{H^2 + l^2}}{2}$;

B. $x = \frac{H + l + \sqrt{H^2 + l^2}}{2}$;

C. $x = \frac{(H + l)^2 - \sqrt{(H + l)^3 - \frac{Hl}{2}}}{2}$;

D. $x = \frac{H + l - \sqrt{H^2 + \frac{l^2}{2}}}{2}$;

E. $x = \frac{H + l - \sqrt{H^2 + 2Hl + 2l^2}}{2}$.

Эта задача для учеников 10 класса, но даже 7-классник легко заметит, что в ответе **C** под корнем неполадки с размерностью. Конечно же, вычитать из кубических метров квадратные метры нельзя. К счастью, остальные ответы проходят проверку на размерность.

Достаточно просто установить, что еще два ответа – **E** и **B** – неверные. Действительно, ответ **E** не подходит, поскольку длина x столбика ртути получается отрицательной:

$$\sqrt{H^2 + 2Hl + 2l^2} = \sqrt{(H + l)^2 + l^2} > H + l.$$

А в ответе **B** длина x столбика ртути оказывается больше длины l трубки:

$$\sqrt{H^2 + l^2} \ge l,\ x = \frac{H + l + \sqrt{H^2 + l^2}}{2} > \frac{2l}{2} = l.$$

Осталось сделать выбор между ответами **A** и **D**. Нам поможет проведение *мысленного опыта*... на Луне. Поскольку там нет атмосферы, ртуть нечему удерживать в трубке, и она должна вытечь полностью. Другими словами, при $H \to 0$ должно быть $x \to 0$. Этому соответствует только ответ **A**, который и является верным.

Интересно, что если сразу догадаться использовать один лишь *предельный переход* $H \to 0$, то можно только с его помощью отбросить все неверные ответы.

Обратимся к решению задачи. Обозначим p – давление воздуха в трубке после ее вынимания, ρ – плотность ртути. Атмосферное давление $p_0 = \rho g H$. В изотермическом процессе $p_0 l/2 = p(l - x)$. Условие равновесия столбика ртути в трубке: $p = p_0 - \rho g x$. Отсюда получается верный ответ **A**.

Разобранные выше задачи показывают, сколь плодотворным может оказаться исследование ответа. Однако иногда это исследование может начаться уже при анализе самого условия задачи. Рассмотрим это на примере задачи из варианта ЕГЭ.

Задача 7. *Под действием постоянной горизонтальной силы $\vec{F}$ клин массой $M = 1$ кг движется по гладкой горизонтальной поверхности стола (рис. 3). По шероховатой поверхности клина, составляющей угол $\alpha = 30°$ с горизонтом, равномерно (относительно клина) скользит вниз брусок массой $m = 0{,}2$ кг. Коэффициент трения между бруском и клином $\mu = 0{,}6$. Найдите модуль ускорения a клина. Сопротивлением воздуха пренебречь. Сделайте рисунок с указанием сил, действующих на брусок.*

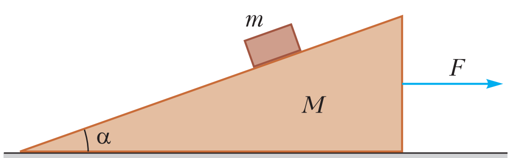

Рис. 3

Возможные ответы:

A. $a = \dfrac{F - mg(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)}{M + m}$;

B. $a = g\dfrac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{\mu\operatorname{tg}\alpha + 1}$;

C. $a = \dfrac{m}{M + m}\dfrac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{\mu\operatorname{tg}\alpha + 1}g$;

D. $a = g\dfrac{\mu - \operatorname{tg}\alpha}{\mu\operatorname{tg}\alpha + 1}$;

E. $a = g\dfrac{\mu + \operatorname{tg}\alpha}{\mu\operatorname{tg}\alpha - 1}$.

В некоторых задачах ЕГЭ есть интересная особенность: наличие избыточных данных, которые не должны входить в ответ. Для успешного решения подобных задач надо непременно научиться распознавать эти лишние данные.

Заметим, что в условии этой задачи явно заданы числовые значения четырех физических величин (M, m, α и μ) и неявно ускорения свободного падения ($g = 10$ м/с^2). Однако числовое значение силы F, действующей на клин, отсутствует. Поэтому ее величина не может входить в ответ, а значит, ответ **A** не верен. А как же искать ускорение клина, не зная величины силы F?

Тут нам поможет тот факт, что по условию задачи брусок скользит *равномерно* относительно клина. Следовательно, ускорения бруска и клина относительно земли одинаковы. Выходит, что можно не использовать второй закон Ньютона для клина и, стало быть, масса M клина не должна входить в ответ. Впрочем, наблюдательный читатель, наверняка, заметил, что в условии требуется изобразить рисунок с указанием сил, действующих лишь на брусок. Эта подсказка подтверждает наше предположение о том, что масса клина в решении не понадобится.

Примечательно, что в ответ не должна входить не только масса M клина, но и масса m бруска. Действительно, анализируя возможные ответы и опираясь снова на размерность, нетрудно понять, что для определения ускорения a в нашем распоряжении имеется лишь одна величина той же размерности – ускорение свободного падения g и две безразмерные величины – коэффициент трения μ и угол α. В ответе могло бы оказаться также отношение масс m/M, но, как мы выяснили, масса M клина входить в него не должна, а значит, и масса бруска тоже не может войти.

У нас остаются три «безмассовых» ответа. Один из них – **E** – отбрасываем, поскольку он выделяется «минусом» в знаменателе: при $\mu\operatorname{tg}\alpha = 1$ ускорение клина должно стремиться к бесконечности. Наконец, у финиша оказались только два конкурента ответа: **B** и **D**. Единственное отличие в этих ответах – знак в числителе дроби. Давайте вспомним задачу о бруске на наклонной плоскости. Легко показать, что при $\mu < \operatorname{tg}\alpha$ брусок скользит по плоскости вниз, при $\mu > \operatorname{tg}\alpha$ остается неподвижен относительно плоскости, а при $\mu = \operatorname{tg}\alpha$ либо лежит на ней (при $v_0 = 0$), либо равномерно соскальзывает (при $v_0 \neq 0$). Для дальнейшего анализа ответа превращаем движущийся клин в неподвижную наклонную плоскость: $a = 0$. Из ответа **D** следует, что при этом $\mu = \operatorname{tg}\alpha$. Тогда как ответ **B** выдает абсурдное $\mu = -\operatorname{tg}\alpha$. Предлагаем читателю самостоятельно выяснить, какова физическая природа появления знака «минус» в верном выражении **D** для ускорения при $\mu < \operatorname{tg}\alpha$.

Приведем теперь краткое решение задачи. Поскольку по условию брусок движется равномерно относительно клина, ускорения клина и бруска относительно земли одинаковы. Направим ось x горизонтально, а ось y – вертикально. Тогда по второму закону Ньютона для бруска в проекциях на эти оси

$$ma = F_{\text{тр}} \cos\alpha - N \sin\alpha,$$
$$0 = F_{\text{тр}} \sin\alpha + N \cos\alpha - mg.$$

Учитывая, что при скольжении $F_{\text{тр}} = \mu N$, получим

$$ma = N(\mu\cos\alpha - \sin\alpha),$$
$$mg = N(\mu\sin\alpha + \cos\alpha).$$

Разделив первое уравнение на второе, имеем

$$\frac{a}{g} = \frac{\mu\cos\alpha - \sin\alpha}{\mu\sin\alpha + \cos\alpha},$$

откуда

$$a = \frac{g(\mu - \operatorname{tg}\alpha)}{\mu \operatorname{tg}\alpha + 1} \approx 0{,}17\ \text{м/с}^2.$$

Не так часто встречаются случаи, когда ответ проходит несколько стадий проверки и кажется весьма правдоподобным, но один из частных случаев противоречит ответу. Подобное может случиться, если мы не обратили внимание на *область допустимых значений*. Вот, к примеру, на первый взгляд несложная задача.

Задача 8. *К телу массой m, находящемуся на горизонтальной поверхности, приложена сила $\vec{F}$, направленная вверх под углом α к горизонту (рис. 4). Коэффициент трения между телом и поверхностью μ. Найдите ускорение a тела.*

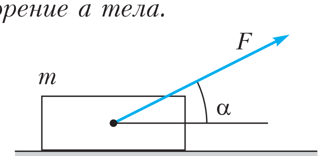

Рис. 4

Решение задачи, казалось бы, не составляет труда. Запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на горизонтальную и вертикальную оси:

$$F\cos\alpha - F_{\text{тр}} = ma,$$
$$N + F\sin\alpha - mg = 0.$$

Учтем, что при скольжении $F_{\text{тр}} = \mu N$. Тогда искомое ускорение тела

$$a = \frac{F\cos\alpha - \mu(mg - F\sin\alpha)}{m}.$$

Ответ получен, но… он неверен. Попробуем найти ошибку, перечитав еще раз условие и проанализировав наше решение. Есть ли в них несостыковки? Очевидно, что при малых значениях силы F тело еще не начнет двигаться, оставаясь в покое. Мы же для определения величины силы трения использовали формулу $F_{\text{тр}} = \mu N$, предположив, что тело скользит. Именно поэтому при подстановке в наш ответ $F = 0$ получается неправдоподобное $a = -\mu g$.

Но это еще не все! А что будет при больших значениях силы F? Обратите внимание, что вместе с ростом F уменьшается сила нормальной реакции опоры N и при $F = mg/\sin\alpha$ становится равной нулю, т.е. тело отрывается от опоры. Исчезают одновременно две силы: $\vec{N}$ и $\vec{F}_{\text{тр}}$, и тело движется под действием только двух сил: $\vec{F}$ и $m\vec{g}$. Ускорение можно найти, записав уравнение второго закона Ньютона в векторном виде: $\vec{F} + m\vec{g} = m\vec{a}$. Из рисунка 5 с помощью теоремы косинусов $(ma)^2 = F^2 + (mg)^2 - 2Fmg\sin\alpha$ можно легко найти модуль ускорения тела:

$$a = \frac{\sqrt{F^2 + (mg)^2 - 2Fmg\sin\alpha}}{m}.$$

При желании с помощью теоремы синусов находится угол, под которым направлено ускорение тела к горизонту.

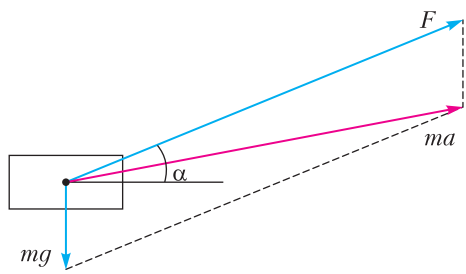

Рис. 5

Теперь можно, наконец, записать правильный ответ:

$$a = 0 \text{ при } 0 \le F \le \frac{mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha},$$

$$a = \frac{F\cos\alpha - \mu\left(mg - F\sin\alpha\right)}{m}$$

$$\text{при } \frac{mg}{\cos\alpha + \mu\sin\alpha} < F \le \frac{mg}{\sin\alpha},$$

$$a = \frac{\sqrt{F^2 + (mg)^2 - 2Fmg\sin\alpha}}{m} \text{ при } F \ge \frac{mg}{\sin\alpha}.$$

При проведении анализа ответа иногда случается невольно натолкнуться на парадоксальную ситуацию. И только глубокое понимание характера применимости законов физики может помочь с честью выйти из непростой ситуации. Рассмотрим это на примере следующей задачи.

Задача 9. *Шар массой $m_1 = 2$ кг, движущийся со скоростью $v = 3$ м/с, налетает на неподвижный шар массой $m_2 = 3$ кг. Между шарами происходит центральный удар, в результате которого налетающий шар останавливается. Какое количество теплоты Q выделилось при ударе?*

Решение этой задачи, как правило, не вызывает серьезных затруднений. В самом деле, очевидно, что, стандартно применяя совместно закон сохранения импульса

$$m_1 v = m_2 u$$

и закон сохранения энергии

$$Q = \frac{m_1 v^2}{2} - \frac{m_2 u^2}{2},$$

быстро приходим к ответу

$$Q = \frac{m_1 v^2}{2}\left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) = \frac{\left(m_2 - m_1\right) m_1 v^2}{2m_2} = 3 \text{ Дж}.$$

Если у вас появилась устойчивая привычка проводить анализ полученного ответа, вы непременно обратите внимание на «минус» в скобках. Получается странная вещь: при равенстве масс шаров теплота при ударе не должна выделяться. Мало того, еще более впечатляющий результат получим, если предположим, что налетающий шар будет тяжелее неподвижного. Действительно, при $m_1 > m_2$ $Q < 0$. Выходит, что в этом случае при ударе тепло не только не выделяется, но как бы «закачивается» в систему шаров. Налицо противоречие полученного нами ответа с физическим смыслом.

Попробуем выяснить причину. И помочь нам в этом могут только те же самые законы сохранения. Если импульс налетающего шара был равен p, то такой же импульс окажется у второго шара после столкновения. Первоначальная энергия системы находилась у первого шара и была равна $E_1 = p^2/\left(2m_1\right)$. После столкновения энергия перешла ко второму шару: $E_2 = p^2/\left(2m_2\right)$. При такой форме записи сразу видно, что в случае равенства масс шаров их кинетические энергии равны, а значит, тепло в системе не выделяется. Что и должно происходить при абсолютно упругом ударе шаров одинаковой массы. Очевидно также, что если в условии задачи налетает более тяжелый шар, то он не сможет остановиться (иначе это привело бы к нарушению закона сохранения энергии). Таким образом, вызвавший наше недоумение при анализе ответа частный случай $\left(m_1 > m_2\right)$ просто невозможен, поскольку противоречит условию задачи, а именно остановке налетающего шара сразу после удара.

***

Подводя итоги, надеемся, что разобранные выше примеры убедили читателя в необходимости и важности анализа буквенного ответа в физических задачах. В качестве тренировки далее предложены упражнения. Однако только ими одними не стоит ограничиваться. Крайне важно выработать у себя привычку не оставлять ответ в задаче без его дальнейшего анализа. Этой цели могут служить разнообразные материалы журнала «Квант», в первую очередь статьи [3] и [4].

Упражнения

1. Треть всего пути автомобиль ехал со скоростью v_1, затем четверть всего времени – со скоростью v_2, остальное – со скоростью v_3. Какова была средняя скорость $v_{ср}$ автомобиля? Возможные ответы:

A. $v_{ср} = \frac{3v_1 v_2 v_3}{v_1 v_2 + v_2 v_3 + v_1 v_3}$; **B.** $v_{ср} = \frac{3v_1 v_2 v_3}{v_1 + v_2 + v_3}$;

C. $v_{ср} = \frac{3v_1\left(v_2 + 3v_3\right)}{2\left(4v_1 + v_3\right)}$; **D.** $v_{ср} = \frac{3v_1\left(v_2 + 3v_3\right)}{4\left(2v_1 + v_3\right)}$.

2. Однородный цилиндр массой m с площадью поперечного сечения S плавает на границе несмешивающихся жидкостей с плотностями ρ_1 и ρ_2 (рис. 6). Пренебрегая сопротивлением жидкостей, определите период малых вертикальных колебаний цилиндра. Возможные ответы:

A. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\left(\rho_2 + \rho_1\right) gS}}$; **B.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\left(\rho_2 - \rho_1\right) gS}}$;

C. $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho_2 \rho_1 gS}}$; **D.** $T = 2\pi\sqrt{\frac{m\left(\rho_2 - \rho_1\right)}{\rho_2 \rho_1 gS}}$.

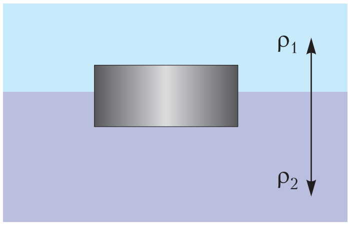

Рис. 6

3. Два автомобиля приближаются к перекрестку по взаимно перпендикулярным дорогам с постоянными скоростями v_1 и v_2. В момент времени, когда первый автомобиль достиг перекрестка, второй находился от него на расстоянии l. Определите минимальное расстояние $d_{\min}$ между автомобилями в процессе их движения. Возможные ответы:

A. $d_{\min} = l\dfrac{v_1^2 - v_2^2}{v_1^2}$; **B.** $d_{\min} = l\dfrac{v_1^2 + v_2^2}{v_1}$;

C. $d_{\min} = l\dfrac{v_2}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$; **D.** $d_{\min} = l\dfrac{v_1}{\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$.

4. За какое время t тело массой m соскользнет с наклонной плоскости высотой h с углом наклона β, если по наклонной плоскости с углом наклона α оно движется вниз равномерно? Возможные ответы:

A. $t = \sqrt{\dfrac{2h\cos\alpha\cos\beta}{g(\sin\alpha + \sin\beta)}}$;

B. $t = \sqrt{\dfrac{2gh}{\sin\beta\sin(\beta - \alpha)}}$;

C. $t = \sqrt{\dfrac{2h\cos\alpha}{g\sin\beta\sin(\beta - \alpha)}}$;

D. $t = \sqrt{\dfrac{2h\sin\alpha}{g(\cos\alpha + \sin\beta)}}$.

5. Теплоизолированный баллон разделен теплоизолирующей перегородкой с клапаном на две части. При закрытом клапане в одной части баллона объемом V_1 находится гелий при давлении p_1 и температуре T_1, а в другой части баллона объемом V_2 находится неон при давлении p_2 и температуре T_2. Найдите температуру T газа, которая установится в баллоне после открытия клапана. Возможные ответы:

A. $T = \dfrac{T_1T_2(p_1V_1 + p_2V_2)}{p_1V_1T_2 + p_2V_2T_1}$;

B. $T = \dfrac{p_1V_1T_2 + p_2V_2T_1}{T_1T_2(p_1V_1 + p_2V_2)}$;

C. $T = \dfrac{T_1T_2(2p_1V_1 + p_2V_2)}{p_1V_1T_2 + p_2V_2T_1}$;

D. $T = \dfrac{2T_1T_2(p_1V_1 + p_2V_2)}{p_1V_1T_2 + p_2V_2T_1}$.

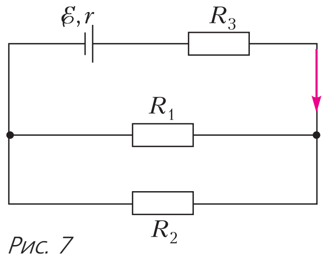

Рис. 7

6. Источник тока с ЭДС $\mathcal{E}$ и внутренним сопротивлением r и три резистора с сопротивлениями R_1, R_2 и R_3 включены по схеме, изображенной на рисунке 7. Найдите силу тока, идущего через резистор R_1. Возможные ответы:

A. $I_1 = \mathcal{E}R_1/\big((R_3 + r)(R_1 + R_2) + R_1R_2\big)$;

B. $I_1 = \mathcal{E}R_2/\big((R_3 + r)(R_1 + R_2) + R_1R_2\big)$;

C. $I_1 = \mathcal{E}R_2/\big((R_3 + r)(R_1 + R_2) - R_1R_2\big)$;

D. $I_1 = \mathcal{E}R_1R_2/\big((R_3 + r)(R_1 + R_2) + R_1R_2\big)$.

7. С какой силой давит клин на вертикальную стену, если на него положили груз массой m (рис. 8)? Угол при основании клина а. Коэффициент трения между грузом и поверхностью клина m, трения между полом и клином нет. Возможные ответы:

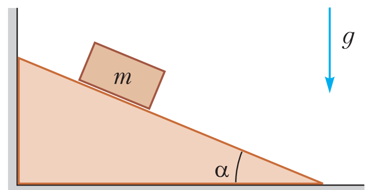

Рис. 8

A. $F = mg\cos\alpha$;

B. $F = mg\cos\alpha(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$;

C. $F = mg\cos\alpha(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$;

D. $F = mg\cos\alpha(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$.

Предупредим читателя сразу: среди этих ответов верного нет. Попробуйте видоизменить и дополнить один из предложенных ответов так, чтобы он стал верным.

Литература

1. *А.Пайс*. Научная деятельность и жизнь Альберта Эйнштейна. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1989.

2. *Л.Тарасов*. Симметрия в задачах по физике. – «Квант», 1978, №6.

3. *Р.Минц*. Как проверить ответ. – «Квант», 1970, №12.

4. *Г.Меледин*. Можно ли проверить ответ? – «Квант», 1979, №7.