Попробуем решить иначе

М.БОНДАРОВ

Как известно, универсального метода решения задач по физике не существует. Однако есть приемы, которые можно применить ко многим задачам. Среди них выделяются так называемые *стандартные*, знакомству с которыми обычно уделяется бóльшая часть времени на уроках. Используя стандартные приемы, можно решить практически все задачи из различных задачников.

В то же время нередко бывает полезно заняться поиском *альтернативных* подходов к решению задачи. Случается, что такие поиски позволяют раскрыть новое содержание в условии, обнаружить некий скрытый смысл и тем самым глубже разобраться в физических явлениях, о которых говорится в задаче.

Рассмотрим некоторые из этих приемов на примере конкретных задач.

Задача 1. *На гладком горизонтальном столе лежит призма массой M с углом наклона α, а на ней – призма массой m (рис.1). На меньшую призму действует горизонтальная сила F, при этом обе призмы движутся вдоль стола как одно целое (т.е. не изменяя взаимного расположения). Определите силу трения между призмами.*

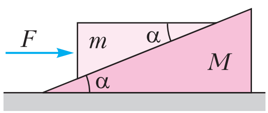

Рис. 1

Стандартное решение. Стандартный подход к решению подобных задач хорошо известен. Вот его краткий путь: 1) делаем рисунок, на котором изображены тела, действующие на них силы, ускорения тел, оси координат; 2) записываем уравнения движения тел (второй закон Ньютона); 3) пишем вспомогательные уравнения (третий закон Ньютона, уравнения кинематики и т.п.).

Итак, начнем с того, что изобразим на рисунках силы, действующие на каждую призму (лучше сделать два рисунка для каждого тела в отдельности). На верхнюю призму действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила $\vec{F}$ и две силы со стороны нижней призмы: сила реакции опоры (равная по величине силе нормального давления) $\vec{N}_1$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр1}$ (рис.2). Направления трех первых сил определить не сложно, а вот выяснить, куда направлена сила трения, не так просто. Ясно, что она направлена вдоль поверхности соприкосновения призм, но куда именно – вверх или вниз – без дополнительного исследования едва ли удастся определить. Придется выбрать одно из этих направлений произвольно (например, вниз, против оси z), а затем, дойдя до конечного ответа, нужно не забыть проанализировать полученный результат. После такого выбора однозначно определяются направления всех сил, действующих на нижнюю призму. Это сила тяжести $M\vec{g}$, сила реакции опоры со стороны стола $\vec{N}_0$, две силы со стороны верхней призмы: сила нормального давления $\vec{N}_2$ и сила трения покоя $\vec{F}_{тр2}$ – она направлена против $\vec{F}_{тр1}$, т.е. вдоль оси z (рис.3).

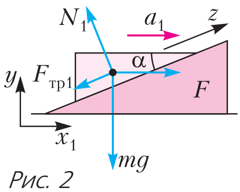

Рис. 2

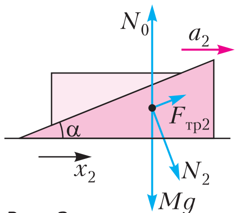

Рис. 3

Рисунки 2 и 3 помогают нам записать уравнения второго закона Ньютона в векторной форме для каждой призмы:

$$\vec{F} + m\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{F}_{тр1} = m\vec{a}_1,$$

$$M\vec{g} + \vec{N}_2 + \vec{F}_{тр2} + \vec{N}_0 = M\vec{a}_2.$$

Эти векторные уравнения в проекциях на горизонтальную ось (x) и вертикальную ось (y) с учетом третьего закона Ньютона: $\vec{N}_1 = -\vec{N}_2$, $N_1 = N_2 = N$; $\vec{F}_{тр1} = -\vec{F}_{тр2}$, $F_{тр1} = F_{тр2} = F_{тр}$ и того факта, что тела движутся как единое целое: $a_1 = a_2 = a$, принимают вид

$$F - F_{тр}\cos\alpha - N\sin\alpha = ma,$$

$$F_{тр}\cos\alpha + N\sin\alpha = Ma,$$

$$N\cos\alpha - mg - F_{тр}\sin\alpha = 0.$$

DOI: https://doi.org/10.4213/kvant20201003

Таким образом, получена система уравнений, из которой можно определить искомую силу трения:

$$F_{тр} = \frac{M}{M+m} F\cos\alpha - mg\sin\alpha.$$

Ну что ж, конечный результат получен. Является ли этот ответ полным и можно ли из него понять, угадано ли нами направление силы трения? Вспомним наше предположение: сила трения, действующая на верхнюю призму, направлена против оси z. Из анализа последнего выражения следует, что выбранное нами направление силы трения совпадает с истинным, если

$$\frac{M}{M+m} F\cos\alpha - mg\sin\alpha > 0, \text{ т.е.}$$

$$F > \frac{M+m}{M} mg\,\mathrm{tg}\,\alpha.$$

В противном случае, если

$$F < \frac{M+m}{M} mg\,\mathrm{tg}\,\alpha,$$

направления сил трения $\vec{F}_{тр1}$ и $\vec{F}_{тр2}$ меняются на противоположные, но их модули можно рассчитывать по единой формуле:

$$F_{тр} = \left|\frac{M}{M+m} F\cos\alpha - mg\sin\alpha\right|.$$

Это и есть ответ к задаче.

Подводим итог этому способу решения. Можно ли было осуществить его короче? На первый взгляд, вроде бы, нет. Но на самом деле такой путь имеется, и состоит он в том, чтобы *объединить тела*, заменив их одним с общей массой и общим ускорением. Это позволит не учитывать силы взаимодействия между призмами, которые станут внутренними и автоматически исчезнут из уравнений. Правда, тем самым пропадет искомая величина. Что ж, дополнительно придется записать еще одно уравнение движения для одной из призм. А чтобы избежать попадания в него неизвестной силы, воспользуемся еще одним приемом: *удачным выбором оси координат*.

Альтернативное решение. Рассмотрим обе призмы как одно тело, масса которого равна $M + m$, движущееся горизонтально с ускорением $\vec{a}$ (рис.4). На него действуют три силы: сила тяжести $(M+m)\vec{g}$, сила нормальной реакции со стороны стола $\vec{N}_{ст}$ и горизонтальная сила $\vec{F}$. Второй закон Ньютона для этого объединенного тела в проекции на горизонтальную ось x принимает вид

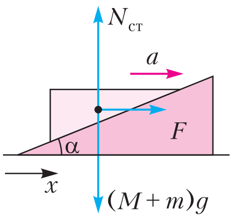

Рис. 4

$$F = (M+m)a.$$

Искомую силу трения проще всего найти, рассмотрев верхнюю призму (см. рис.2). Запишем для этой призмы второй закон Ньютона в проекциях на ось z:

$$F\cos\alpha - F_{тр} - mg\sin\alpha = ma\cos\alpha.$$

Как видим, выбор оси, действительно, оказался удачным. Поскольку вектор силы $\vec{N}_1$ перпендикулярен оси z, его проекция на эту ось равна нулю. Таким образом, имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными, откуда легко находим искомую силу трения:

$$F_{тр} = \frac{M}{M+m} F\cos\alpha - mg\sin\alpha.$$

Подводим итог. Примененные нами приемы – объединение тел в единое целое и удачный выбор оси, на которую проецируется уравнение второго закона Ньютона, – позволили значительно упростить решение данной задачи.

Задача 2. *На гладкой горизонтальной поверхности находится горка, масса которой $M = 8$ кг, а высота $h = 1$ м (рис.5). На вершину горки положили тело массой $m = 2$ кг, которое, скатившись, упруго ударяется о пружину, закрепленную неподвижно, и вновь поднимается на горку. Найдите максимальную высоту H, на которую поднимется тело в этом случае. Трение в системе отсутствует.*

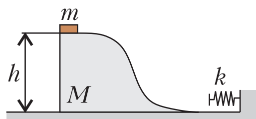

Рис. 5

Стандартное решение. Заметим, что в данном случае движения тела по горке и самой горки по горизонтальной поверхности не являются равноускоренными. Поэтому динамический подход в данной задаче применить не удастся. Ничего страшного, в нашем распоряжении имеются законы сохранения. Их можно использовать, поскольку трение в системе отсутствует и в горизонтальном направлении никаких внешних воздействий нет, не считая кратковременного соприкосновения тела с пружиной.

Разобьем решение на три этапа: 1) спуск тела с горки; 2) взаимодействие тела с пружиной; 3) въезд тела на горку.

1) Пусть скорость тела после спуска с горки равна v_1, а скорость самой горки в этот момент равна v_2. Запишем законы сохранения импульса и механической энергии для системы «горка – тело»:

$$0 = mv_1 - Mv_2,$$

$$mgh = \frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}.$$

Из этих уравнений определим скорости горки и тела при его движении до пружины:

$$v_2 = \sqrt{\frac{2m^2gh}{M(M+m)}},\ v_1 = \sqrt{\frac{2Mgh}{M+m}}.$$

2) Взаимодействие тела с пружиной приведет к тому, что вектор его скорости изменит направление на противоположное, оставив прежней свою величину v_1.

3) Наконец, отскочив от пружины, тело массой m догонит горку, заедет на нее и в точке наивысшего подъема будет вместе с ней двигаться относительно земли со скоростью v_3. Законы сохранения теперь примут такой вид:

$$mv_1 + Mv_2 = (M+m)v_3,$$

$$\frac{mv_1^2}{2} + \frac{Mv_2^2}{2} = \frac{(M+m)v_3^2}{2} + mgH.$$

Из этой системы уравнений получаем

$$H = h\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2 = 0{,}36 \text{ м}.$$

Альтернативное решение. Энергия системы «горка – тело» будет оставаться неизменной в любой момент времени, когда пружина не деформирована. В начальный момент энергия E_1 системы равна потенциальной энергии тела (за ноль потенциальной энергии принята энергия на уровне плоскости):

$$E_1 = mgh.$$

Из закона сохранения импульса следует, что после того как тело покинет горку, но еще не коснется пружины, тело и горка будут иметь равные по модулю импульсы p. В это время энергия системы E_2 состоит из суммы кинетических энергий горки и тела:

$$E_2 = \frac{p^2}{2M} + \frac{p^2}{2m}.$$

Когда тело, отскочив от пружины, догонит горку и поднимется на максимальную высоту, система «горка – тело» будет иметь импульс $2p$, а ее энергия станет равной

$$E_3 = \frac{(2p)^2}{2(M+m)} + mgH.$$

Поскольку выполняется закон сохранения механической энергии, то $E_1 = E_2 = E_3$, или

$$mgh = \frac{p^2}{2M} + \frac{p^2}{2m} = \frac{(2p)^2}{2(M+m)} + mgH.$$

Отсюда находим искомую высоту:

$$H = h\left(\frac{M-m}{M+m}\right)^2.$$

Как видим, *неявное использование закона сохранения импульса и не часто встречающаяся запись формулы кинетической энергии* $E_к = \frac{p^2}{2m}$ позволили упростить решение задачи.

Замечание. В некоторых задачах полезно учесть соотношение между заданными величинами, что иногда позволяет существенно сократить процесс решения. Так, в нашем случае можно было прийти к верному ответу практически устно, заметив, что $M = 4m$. Действительно, из последней формулы для кинетической энергии следует, что после соскальзывания кинетическая энергия тела $E_{кт2}$ будет составлять 4/5 от общей энергии системы E_1, т.е. $E_{кт2} = \frac{4}{5}mgh$. Выразим далее через E_1 общую кинетическую энергию $E_{к3}$ системы «горка – тело» в момент достижения телом высоты H. Поскольку импульс системы вдвое больше импульса тела после отскока от пружины, а ее масса больше массы тела в 5 раз, то

$$E_{к3} = \frac{2^2}{5}E_{кт2} = \frac{2^2}{5}\cdot\frac{4}{5}mgh = \frac{16}{25}mgh.$$

Итак, в начале движения полная энергия системы равнялась mgh, в конце кинетическая энергия системы составляла $\frac{16}{25}mgh$. Значит, на долю потенциальной энергии в этот момент приходилось $\frac{9}{25}mgh$. Таким образом, искомая высота равна

$$H = \frac{9}{25}h = 0{,}36 \text{ м}.$$

Задача 3. *С поверхности земли подброшен вертикально вверх небольшой шарик с начальной скоростью $v_0 = 5$ м/с. В тот момент когда он достиг верхней точки, снизу с того же места подброшен точно такой же шарик с такой же начальной скоростью. При столкновении шарики слипаются и движутся далее как одно целое. Определите промежуток времени t, в течение которого первый шарик находился в полете от момента броска до момента соприкосновения с поверхностью земли. Сопротивлением воздуха можно пренебречь. Ускорение свободного падения примите равным $g = 10$ м/с^2.*

Стандартное решение. Выберем систему отсчета с началом на поверхности земли и координатной осью y, направленной вертикально вверх. Уравнения движения шариков имеют вид

$$y_1(t) = v_0 t - \frac{gt^2}{2},$$

$$y_2(t) = v_0(t - t_0) - \frac{g(t - t_0)^2}{2},$$

где $t_0 = \dfrac{v_0}{g}$ – время подъема первого шарика до верхней точки. Из равенства $y_1(t_1) = y_2(t_2)$ находим, что промежуток времени t_1 от момента подбрасывания первого шарика до столкновения шариков равен

$$t_1 = \frac{3v_0}{2g},$$

а высота h, на которой произойдет столкновение, составляет

$$h = \frac{3v_0^2}{8g}.$$

Непосредственно перед столкновением скорости каждого из шариков по величине равны $v = v_0/2$, но направлены в противоположные стороны. По закону сохранения импульса сразу после столкновения скорость слипшихся шариков равна нулю. Время их свободного падения на землю с высоты h равно

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{v_0}{2g}\sqrt{3}.$$

Общее время полета первого шарика (т.е. искомый промежуток времени) равно

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0}{2g}\left(3 + \sqrt{3}\right) \approx 1{,}2 \text{ с}.$$

Альтернативное решение. Как и в первом способе решения, определим сначала время полета первого шарика до верхней точки: $t_0 = v_0/g$. Рассмотрим далее систему из двух шариков как единое целое. Центр масс этой системы находится на высоте $H/2$ и имеет скорость $v_0/2$. Здесь H – максимальная высота подъема первого шарика, которую легко найти из закона сохранения энергии:

$$\frac{mv_0^2}{2} = mgH, \text{ и } H = \frac{v_0^2}{2g}.$$

Уравнение движения центра масс от момента слипания шариков до момента их падения в течение времени T имеет вид

$$-\frac{H}{2} = \frac{v_0}{2}T - \frac{gT^2}{2},$$

или

$$T^2 - \frac{v_0}{g}T - \frac{v_0^2}{2g^2} = 0.$$

Положительный корень этого уравнения равен

$$T = \frac{v_0}{2g}\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

Таким образом, общее время полета равно

$$t = t_0 + T = \frac{v_0}{2g}\left(3 + \sqrt{3}\right).$$

Обратите внимание, что, решая первым способом, мы попутно узнали некоторые подробности движения (например, время движения шариков до столкновения и высоту, на которой они столкнулись). Зато второй способ – *метод центра масс* – оказался значительно короче.

Задача 4. *Груз висит на пружине жесткостью $k = 60$ Н/м. Какую надо совершить работу, чтобы растянуть пружину еще на $x_1 = 2$ см?*

Стандартное решение. При растяжении пружины изменяются две потенциальные энергии: самой пружины – она увеличивается на $\Delta E_{п1} = \dfrac{k(x_0 + x_1)^2}{2} - \dfrac{kx_0^2}{2}$ и груза в поле тяготения – его энергия уменьшается на $\Delta E_{п2} = mgx_1$, где x_0 – начальная деформация пружины, m – масса груза. Искомая работа пойдет на изменение этих потенциальных энергий:

$$A = \frac{k(x_0 + x_1)^2}{2} - \left(mgx_1 + \frac{kx_0^2}{2}\right).$$

При этом в начальном положении груз находился в равновесии:

$$mg = kx_0.$$

Из этих выражений получим

$$A = \frac{kx_1^2}{2} = 12 \text{ мДж}.$$

Задача решена, но трудно не заметить, что конечное выражение для работы имеет тот же вид, как если бы происходило растяжение недеформированной пружины на величину x_1. Попробуем разобраться, в чем причина такого совпадения.

Альтернативное решение. Изобразим график зависимости силы упругости F, возникающей в пружине, от ее удлинения x (рис.6).

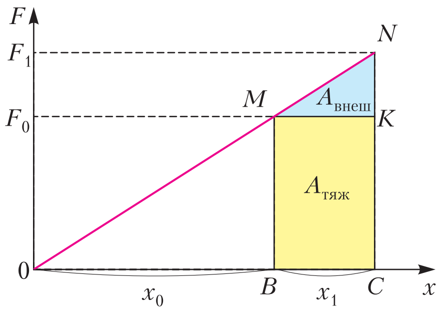

Рис. 6

Первоначально груз растянул пружину на величину x_0, поэтому

$$mg = F_0 = kx_0.$$

При растяжении пружины еще на величину x_1 она совершает отрицательную работу, модуль которой численно равен площади трапеции $BMNC$. В то же время из графика видно, что работа силы тяжести $A_{тяж}$ (выделено желтым) и работа искомой внешней силы $A_{внеш}$ (выделено синим) в сумме дают то же значение. По условию требуется определить только $A_{внеш}$. Ее легко найти из графика:

$$A_{внеш} = \frac{(F_1 - F_0)x_1}{2}.$$

Но $F_1 - F_0 = kx_1$, поэтому

$$A_{внеш} = \frac{kx_1^2}{2}.$$

Замечание. Давайте снова посмотрим на график. Если перенести выделенный синим треугольник в начало координат, то нетрудно видеть, что его площадь будет численно равна работе силы упругости при ее растяжении из недеформированного состояния на величину x_1. Другими словами, полезно иметь в виду, что при смещении подвешенного груза от положения равновесия *действие двух сил* – тяжести и упругости – *можно заменить на действие одной силы упругости*, деформация которой отсчитывается от положения равновесия.

Задача 5. *На наклонной плоскости с углом* α *находится кубик (рис. 7). К кубику прикреплена легкая пружина, другой конец которой закреплен в неподвижной точке A. В исходном состоянии кубик удерживается в положении, при котором пружина не деформирована. Кубик отпускают без начальной скорости. Определите максимальную скорость кубика в процессе движения. Масса кубика m, жесткость пружины k, коэффициент трения* μ *(*$\mu < \operatorname{tg}\alpha$*).*

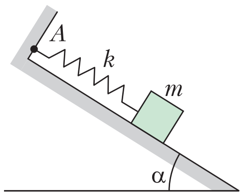

Рис. 7

Стандартное решение. В процессе движения на кубик действуют (рис.8): сила тяжести $m\vec{g}$, направленная вертикально вниз; сила нормальной реакции опоры $\vec{N}$, направленная перпендикулярно наклонной плоскости; сила трения скольжения $\vec{F}_{тр}$, направленная вдоль наклонной плоскости вверх; сила упругости пружины $\vec{F}_{упр}$, направленная также вдоль наклонной плоскости вверх (предполагается, что ось пружины параллельна наклонной плоскости).

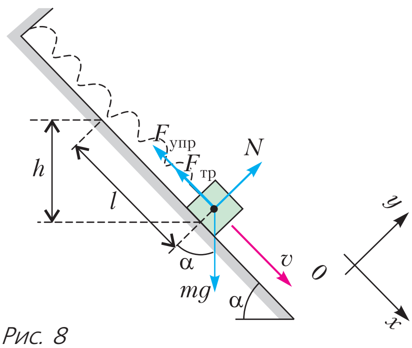

Рис. 8

По условию в начальный момент пружина не деформирована. Когда кубик отпускают, он начинает двигаться прямолинейно по наклонной плоскости вниз. При этом скорость кубика увеличивается и в некоторый момент времени достигает искомого максимального значения v. Пусть к этому моменту кубик прошел вдоль наклонной плоскости путь l. Значит, деформация пружины при этом также равна l. Кроме того, смещение кубика по вертикали вниз будет равно $h = l\sin\alpha$. Если считать потенциальную энергию кубика в поле тяжести в этом положении равной нулю, то приращение механической энергии кубика за время, прошедшее с момента начала движения, будет равно

$$\Delta E = \frac{mv^2}{2} + \frac{kl^2}{2} - mgl\sin\alpha.$$

С другой стороны, это приращение должно быть равно суммарной работе неконсервативных сил, действующих на кубик. Сила нормальной реакции опоры работы не совершает, а работа силы трения скольжения равна $A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}l$, причем $F_{\text{тр}} = \mu N$. Тогда

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{kl^2}{2} - mgl\sin\alpha = -\mu Nl.$$

Запишем для кубика уравнения второго закона Ньютона в проекциях на оси x и y для момента времени, когда скорость кубика максимальна (ускорение кубика при этом равно нулю):

$$mg\sin\alpha - F_{\text{упр}} - F_{\text{тр}} = 0,$$

$$N - mg\cos\alpha = 0,$$

где $F_{\text{упр}} = kl$, $F_{\text{тр}} = \mu N$. Отсюда

$$l = \frac{m}{k}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Окончательно получим

$$v = \sqrt{\frac{m}{k}}g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Альтернативное решение. После решения задачи в общем виде полезно задуматься над ответом. Не правда ли, в нем проявляются знакомые черты? Ну, конечно, искомая скорость равна произведению двух хорошо известных величин. Один из сомножителей – это ускорение a тела, скатывающегося с наклонной плоскости:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Другой сомножитель – величина, обратная циклической частоте ω гармонических колебаний груза на пружине:

$$\frac{1}{\omega} = \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

Случайно ли такое совпадение? Скорее всего, нет, ведь обе величины имеют непосредственное отношение к процессам, происходящим в нашей задаче. Правда, формула для ускорения подходит лишь в случае отсутствия действия на тело силы упругости пружины. Тогда как формулу циклической частоты привычно применяют для колебаний груза на пружине без трения. У нас же сила упругости пружины отсутствует только в начальный момент движения, когда ускорение тела максимально. Стоп! Вот мы и наткнулись на подсказку. Существует же формула связи максимальной скорости v_m и максимального ускорения a_m при гармонических колебаниях:

$$a_m = \omega v_m.$$

Выходит, если подставить в нее выражения для a и ω, получится верное значение для максимальной скорости.

А возможно ли применение формулы, связывающей a_m и v_m, в данной задаче? Вспомним происхождение этой формулы. Как известно, она выводилась из уравнения зависимости координаты колеблющегося тела от времени: $x = x_m\cos(\omega t + \varphi_0)$. А само это уравнение оказалось решением дифференциального уравнения (второго закона Ньютона) для колебательного движения: $x'' + \omega t = 0$, где $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ – частота для колебаний груза на пружине.

Итак, направление поиска известно: *надо записать аналогичное уравнение в нашем случае и сравнить с уравнением колебаний*. Из анализа стандартного решения следует:

$$mg\sin\alpha - F_{\text{упр}} - F_{\text{тр}} = ma.$$

Но $a = x''$, $F_{\text{упр}} = kx$ (x – удлинение пружины в произвольный момент времени), $F_{\text{тр}} = \mu mg\cos\alpha$. Тогда получим

$$mg\sin\alpha - kx - \mu mg\cos\alpha = mx'',$$

или

$$x'' + \frac{k}{m}x + g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha) = 0.$$

Это уравнение отличается от уравнения колебаний лишь на константу $C = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha)$. А значит, в нашем случае циклическая частота и соотношение между максимальными величинами ускорения и скорости имеют тот же вид, что и для гармонических колебаний.