Размышляем, решая задачу

М.БОНДАРОВ

Как-то раз, просматривая задачи ЕГЭ, я наткнулся на следующую задачу:

Пластилиновый шарик в момент $t = 0$ бросают с горизонтальной поверхности земли с начальной скоростью v_0 под углом α к горизонту. Одновременно с некоторой высоты над поверхностью земли начинает падать из состояния покоя другой такой же шарик. Шарики абсолютно неупруго сталкиваются в воздухе. Сразу после столкновения скорость шариков направлена горизонтально. В какой момент времени τ шарики упадут на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Довольно быстро я понял, как ее следует решать стандартным образом. Но у меня давно выработалась привычка анализировать решенную задачу. И сразу возник вопрос: «А нельзя ли решить задачу иначе?» Тут же в голову пришло желание угадать, каким должен быть ответ в нашей задаче. «Зачем это нужно? – может спросить читатель. – Неужели серьезная наука физика похожа на детскую игру «Угадайку»?»

В качестве аргумента «за» не откажу себе в удовольствии сослаться на авторитет знаменитого американского физика Дж.Уилера. «Никогда не начинай вычислений, пока не знаешь ответа, – писал известный теоретик и выдающийся педагог. – Каждому вычислению предпосылай оценочный расчет: привлеки простые физические соображения (симметрию!, инвариантность!, сохранение!) до того, как начинаешь подробный вывод; продумай возможные ответы на каждую загадку. Будь смелее, ведь никому нет дела до того, что именно ты предположил. Поэтому делай предположения быстро, интуитивно. Удачные предположения укрепляют эту интуицию. Ошибочные предположения дают полезную встряску». Это высказывание ученого широко известно в научных кругах и даже получило специальное название: «Основное правило Уилера».

Соображения размерности помогут достаточно быстро сконструировать примерный вид конечной формулы. Действительно, из размерных величин в условие входит лишь начальная скорость v_0 да ускорение свободного падения g – вот и весь небогатый набор. Из него можно составить только одну комбинацию величин, имеющую размерность времени: v_0/g. Ясно, что заданный в условии угол α должен появиться в виде аргумента функции синуса, поскольку время полета тела, движущегося по параболе, определяется проекцией $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ его начальной скорости на вертикальную ось y. Таким образом, мы приходим к выводу, что ответ должен иметь вид

$$\tau = k\frac{v_0 \sin\alpha}{g}, \qquad (1)$$

где k – некий безразмерный числовой коэффициент. Его-то поиском нам и придется заняться для получения окончательного ответа.

Изобразим траектории шариков от момента начала их движения из точек A и B до столкновения в точке D, а затем до совместного падения в точке E (рис.1). При столкновении шариков одинаковой массы проек-

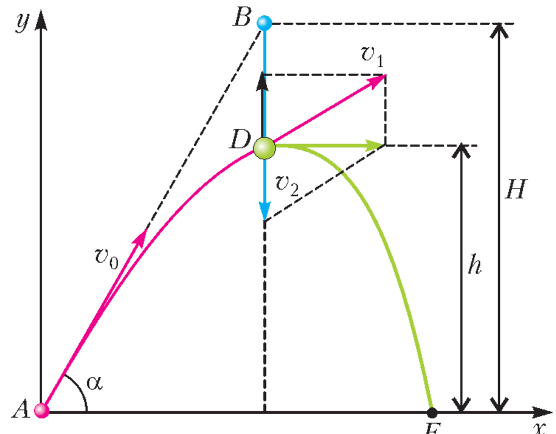

Рис. 1

ции векторов их скоростей $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ на вертикальную ось y должны быть равны по модулю и противоположны по знаку. Только в этом случае, согласно закону сохранения импульса, скорость слипшегося комка будет направлена горизонтально.

Замечание. Критически настроенный читатель может потребовать обоснования при-

(Продолжение см. на с. 34)

(Начало см. на с. 31)

менения этого закона при столкновении шариков, ведь система из двух шариков не является замкнутой – на них действует ничем не скомпенсированная сила тяжести. Отметим, однако, что время взаимодействия шариков мало, а сила тяжести имеет ограниченную величину, вот почему закон сохранения импульса в нашем случае можно применять.

Мы уже говорили, что время полета шариков не зависит от горизонтальной составляющей начальной скорости первого тела. Поэтому для решения уместно **переформулировать задачу**. Давайте изменим ее условие так, чтобы она превратилась в задачу о столкновении тел, движущихся по вертикали (вычеркнем из условия лишние слова, добавив в него новые):

Пластилиновый шарик в момент $t = 0$ бросают с ~~горизонтальной~~ поверхности земли вертикально вверх с начальной скоростью v_{0y} ~~под углом~~ α ~~к горизонту~~. Одновременно с некоторой высоты над поверхностью начинает падать из состояния покоя другой такой же шарик. Шарики абсолютно неупруго сталкиваются в воздухе. Сразу после столкновения скорость шариков ~~направлена горизонтально~~ равна нулю. В какой момент времени τ шарики упадут на землю? Сопротивлением воздуха пренебречь.

Ясно, что при $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ ответы обеих задач совпадут.

Разобьем решение нашей переформулированной задачи на два этапа: движение шариков до встречи; движение слипшегося комка. Определим сначала, в какой момент времени t_1 шарики встретятся в точке D (рис.2). Ответ на этот вопрос можно дать, зная, например, высоту H, на которой находится точка B. В точке D шарики имеют равные по модулю и направленные противоположно скорости. При этом второй шарик за время t_1 набрал скорость v_1, т.е. изменил свою скорость на величину v_1. Но ведь и первый шарик двигался с тем же ускорением $\vec{g}$, поэтому изменение его скорости

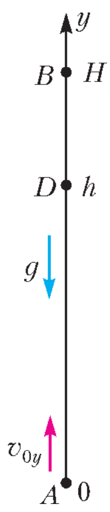

Рис. 2

также равно по модулю v_1, правда он при этом уменьшал свою скорость. Попробуем представить, что бы произошло, если бы шарики не столкнулись. Тогда первый шарик продолжал бы свое движение вверх до остановки на мгновение в верхней точке B. Причем это движение от D до B заняло бы столько же времени, сколько продолжалось его движение от A до D, т.е. t_1. В этом можно убедиться, мысленно засняв на кинопленку движение второго шарика, а затем прокрутив ее обратно. Тогда в обращенном движении второй шарик долетел бы, тормозя, от D до B за то же время t_1. Однако и первый шарик летел бы так же, если бы не встретил на своем пути второй шарик. Следовательно, время подъема первого шарика на высоту H равно $2t_1$. Теперь мы легко определяем время t_1:

$$t_1 = \frac{v_{0y}}{2g} = \frac{v_0 \sin\alpha}{2g}, \qquad (2)$$

а также высоту подъема H:

$$H = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}. \qquad (3)$$

Найденное время t_1 позволит нам лишний раз убедиться в том, что перед столкновением в точке D шарики имеют одинаковые по модулю скорости. Действительно, первый шарик к этому моменту уменьшает свою скорость до величины

$$v_{1y} = v_{0y} - gt_1 = v_{0y} - g\frac{v_{0y}}{2g} = \frac{v_{0y}}{2} = \frac{v_0 \sin\alpha}{2},$$

а второй – увеличивает свою до значения

$$v_{2y} = -gt_1 = -g\frac{v_{0y}}{2g} = -\frac{v_{0y}}{2} = -\frac{v_0 \sin\alpha}{2}.$$

Стоп! По ходу наших рассуждений «запестрили» формулы! Но ведь хотелось рассказать о красивом решении задачи, которое, как правило, подразумевает сокращение математических преобразований, а еще лучше – решение задачи в уме. Попробуем возразить: во-первых, формулы (2) и (3) не являются настолько сложными, чтобы было трудно удерживать их в голове без записи, а во-вторых, – и это главное! – мы выберем сейчас другой путь решения, где преобразовывать формулы не придется. Добавим, что в дальнейшем ходе решения формула (3) нам вообще не понадобится. Для выхода на окончательный ответ будет использована только простейшая формула

$$h = \frac{gt^2}{2}. \qquad (4)$$

Как только мы узнаем, во сколько раз β высота H точки B больше высоты h встречи шариков в точке D, задача будет решена. Действительно, из формулы (4) следует, что если высоты отличаются в β раз, то времена падения тел отличаются в $\sqrt{\beta}$ раз. Для определения величины β используем закон нечетных чисел, который гласит: тело, движущееся без начальной скорости с постоянным ускорением, за равные промежутки времени проходит расстояния, отношения которых образуют последовательность нечетных чисел. Мы уже выяснили, что если бы второе тело не столкнулось в точке D с первым, то время его полета от B до D равнялось бы времени полета от D до A. Тогда из закона нечетных чисел следует, что $DA = 3BD$, т.е. $h = \frac{3}{4}H$. Таким образом, шарики после столкновения двигались до падения на землю время

$$t_2 = \sqrt{3}t_1,$$

а общее время движения равно

$$\tau = t_1 + t_2 = t_1\left(1 + \sqrt{3}\right).$$

Подставив сюда выражение для t_1 из формулы (2), получим

$$\tau = \frac{v_0 \sin\alpha}{2g}\left(1 + \sqrt{3}\right). \qquad (5)$$

Итак, ответ нами найден, причем действительно практически устно. Неплохо бы проверить его, выбрав иной путь решения. Для этого используем надежный **графический способ решения**.

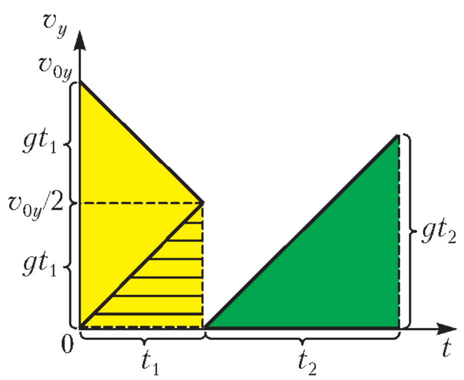

Рис. 3

Построим график зависимости проекций на вертикальную ось y скоростей шариков от времени (рис.3). При построении было учтено, что ускорение тел одинаково ($\vec{g}$), поэтому наклон графиков также одинаков. Графики делают очевидными те соотношения, которые были получены в первом способе решения. Рассмотрим это подробнее по пунктам.

1) Из графика ясно видно, что модуль изменения проекции скорости каждого из тел до встречи равен $v_{0y}/2$.

2) Главное достоинство графиков скорости – наглядное определение пройденных расстояний и соотношений между ними, поскольку площадь под графиком скорости численно равна пройденному пути. Площадь трапеции, выделенной желтым цветом, численно равна расстоянию, пройденному первым шариком до встречи. Расстояние, на которое переместился за это время второй шарик, совпадает с площадью заштрихованного треугольника. Очевидно, что вторая площадь втрое меньше первой. Таким образом, мы легко приходим к соотношению $h = \frac{3}{4}H$, откуда сразу получается закон нечетных чисел.

3) И наконец, график позволяет установить соотношение между временем t_1 полета до столкновения и временем t_2 движения слипшегося комка до падения. Сумма площадей трапеции и заштрихованного треугольника равна площади прямоугольника со сторонами v_{0y} и t_1, в то же время она численно равна первоначальному расстоянию H по вертикали между шариками, т.е.

$$H = v_{0y}t_1.$$

С другой стороны, эта площадь вчетверо больше площади заштрихованного треугольника:

$$H = 4\frac{gt_1^2}{2}.$$

После столкновения слипшиеся шарики начнут падать и по вертикали пройдут расстояние

$$h = \frac{3}{4}H.$$

Геометрически это расстояние представлено площадью зеленого прямоугольного треугольника, катеты которого равны gt_2 и t_2, т.е.

$$h = \frac{gt_2^2}{2}.$$

Из последних трех равенств получим соотношение между временами t_1 и t_2:

$$t_2 = t_1\sqrt{3},$$

после чего снова выходим на конечный ответ (5).

Таким образом, нами получены два независимых способа решения задачи. Однако существует и третий способ решения: **изучение движения центра масс системы**.

Рассматривать движение центра масс системы двух шариков очень удобно, поскольку не требуется разбивать решение на два этапа: до и после столкновения, ведь движение центра масс системы не зависит от взаимодействий тел этой системы друг с другом, а определяется только действием внешних сил.

Напомним, что координата y_C и скорость v_{Cy} центра масс C системы двух материальных точек с массами m_1 и m_2, расположенных в точках с координатами y_1 и y_2 и имеющих скорости v_{1y} и v_{2y} соответственно, определяются по формулам

$$y_C = \frac{m_1y_1 + m_2y_2}{m_1 + m_2},$$

$$v_{Cy} = \frac{m_1v_{1y} + m_2v_{2y}}{m_1 + m_2},$$

что для нашего случая равных масс дает

$$y_C = \frac{H}{2} \text{ и } v_{Cy} = \frac{v_{0y}}{2}.$$

Центр масс движется из точки C с ускорением $\vec{g}$, направленным вертикально вниз, и до падения на землю в точке E перемещается вниз по вертикали на расстояние $H/2$ (на рисунке 4 красным цветом показаны траектория движения центра масс и векторы его скоростей в начальный момент $t = 0$ и в момент t_1 столкновения). Запишем уравнение движения центра масс:

$$-\frac{H}{2} = \frac{v_{0y}}{2}\tau - \frac{g\tau^2}{2},$$

а затем приведем его к виду

$$\tau^2 - \frac{v_{0y}}{g}\tau - \frac{H}{g} = 0.$$

В решении этого квадратного уравнения

$$\tau = \frac{v_{0y}}{2g} \pm \sqrt{\frac{v_{0y}^2}{4g^2} + \frac{H}{g}}$$

необходимо отбросить знак «минус», как противоречащий физическому смыслу, а также подставить в него величину $v_{0y} = v_0 \sin\alpha$ и найденное ранее выражение (3) для H, после чего мы в третий раз приходим к ответу (5).

Заметим, что и в этом случае решение можно выполнить без расчетов на бумаге. Правда, имеется вероятность потерять в преобразованиях какую-либо из букв, входящих в уравнение. Чтобы по возможности избежать подобных ошибок, применим так называемое обезразмеривание физических величин. Для этого перейдем от абсолютных величин v_{0y} и g к относительным, преобразовав сначала уравнение движения центра масс с помощью выражения (3) к виду

$$\tau^2 - \frac{v_{0y}}{g}\tau - \frac{v_{0y}^2}{2g^2} = 0,$$

а затем умножив на $\frac{g}{v_{0y}}$. Тогда для безразмерного времени x получим

$$x^2 - x - \frac{1}{2} = 0.$$

С этим уравнением, несомненно, без труда справится каждый читатель журнала и придет к ответу

$$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{3}\right).$$

Осталось лишь, отбросив, как и в предыдущем случае, знак «минус», добавить размер-

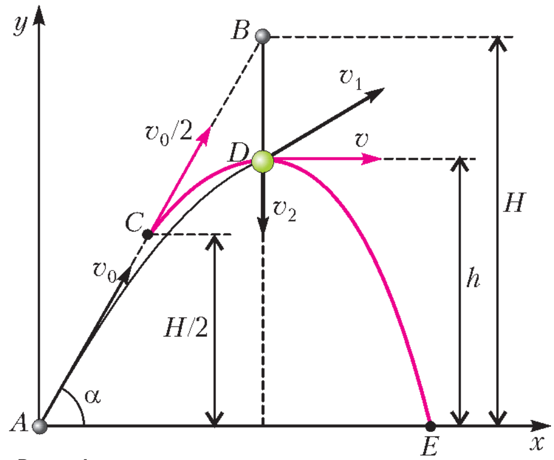

Рис. 4

ную комбинацию $\dfrac{v_0 \sin\alpha}{g}$, и мы в очередной раз приходим к ответу (5).

Конечно, найти корни уравнения вида $x^2 + px + q = 0$ нетрудно. Я же привык решать его с помощью песенки, услышанной мною в детстве в передаче «Радионяня»:

Чтобы решить уравнение,
корни его отыскать,
надо немного терпения,
ручку, перо и тетрадь.
Минус напишем сначала.
Рядом с ним – пэ пополам,
плюс-минус знак радикала,
с детства знакомого нам.
Ну, а под корнем, приятель,
сводится все к пустяку:
пэ пополам и в квадрате
минус несчастное ку.

Настало время подвести итоги. Задача решена тремя различными способами. Вместе с тем, существует и четвертый, о котором я вспоминал в самом начале и которым, по-видимому, и решали большинство сдававших экзамен. В чем его особенность? Попробуем лучше назвать те из перечисленных ранее приемов решения, которые в нем отсутствуют. В четвертом способе не используются графики, не нужно рассматривать движение центра масс, а также обезразмеривать физические величины. Достаточно лишь записать уравнения зависимости координат y движущихся шариков и проекций их скоростей на ту же ось от времени, а затем приравнять, соответственно, эти координаты и проекции скоростей в момент времени t_1. Далее, конечно, понадобится закон сохранения импульса и кинематическая формула падения тела с известной высоты без начальной скорости. Не сомневаюсь, что читатель без труда сумеет восстановить этот способ решения.

Может возникнуть вопрос: все ли подходы к решению были рассмотрены? Конечно, нет. Вот, к примеру, еще один независимый способ нахождения величин t_1 и H. Как известно, при равноускоренном движении зависимость скорости от времени имеет вид

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{a}t\,.$$

Используя эту формулу для описания движения центра масс системы шариков в течение времени t_1 до столкновения, получим выражение

$$\vec{v} = \frac{\vec{v}_0}{2} + \vec{g}t_1\,.$$

Изобразив это векторное равенство наглядно на рисунке 5, определим нужное время:

$$\sin\alpha = \frac{gt_1}{v_0/2},$$

$$\text{и } t_1 = \frac{v_0 \sin\alpha}{2g}.$$

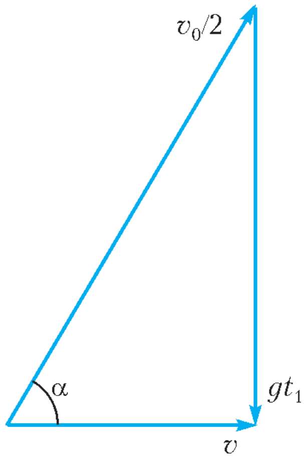

Рис. 5

А высоту H можно найти из рисунка 1. Обратите внимание, что вектор $\vec{v}_0$ начальной скорости первого шарика нацелен на точку B. Это не случайно. Особенно очевидным становится такой выбор направления скорости, если перейти в систему отсчета, связанную со вторым шариком. В ней первый шарик движется прямолинейно и равномерно по направлению ко второму со скоростью $\vec{v}_0$. За время t_1 до столкновения первый шарик должен пролететь расстояние $H/\sin\alpha$, поэтому

$$\frac{H}{\sin\alpha} = v_0 t_1, \text{ и } H = v_0 t_1 \sin\alpha.$$

Подставив сюда найденное ранее выражение для t_1, получим

$$H = \frac{v_0^2 \sin^2\alpha}{2g}.$$

Заметно подуставший от всех описанных выше способов читатель вправе спросить: «Ну, а теперь-то можно поставить точку в решении этой задачи?» Думаю, что, действительно, способов нахождения времени τ приведено достаточно. Однако есть и другие величины, которые небезынтересно было бы поискать в нашей задаче. Приведем только два возможных вопроса, на которые любознательный читатель несомненно сумеет найти правильные ответы.

1. С какой скоростью (по величине и направлению) шарики упадут на землю?

2. На каком расстоянии от места старта первого шарика находится их общая точка падения E?