



Задачи-оценки

Кандидат физико-математических наук
Г. В. МЕЛЕДИН

В жизни каждому нередко приходится делать прикидки, оценки: успею ли добраться, хватит ли денег, намного ли надо подвести регулятор часов, сумею ли удержать груз и т. п.

В деятельности исследователей оценки необходимы профессионально. Грубая прикидка, оценка по порядку величины — почти обязательный этап подготовки эксперимента, проектирования установки, теоретической разработки. Они незаменимы в процессе обсуждения новых идей и проектов. Иногда оценки подсказывают путь точного решения задачи, дают возможность установить границы области применимости точного решения и понять, какие изменения потребуются при постановке и решении задачи вне пределов этой области.

Умение делать прикидки, наряду с интуицией, весьма существенно в творческой работе. Неслучайно поэтому, что в последнее время задачи-оценки стали встречаться и на вступительных экзаменах в вузы. Например, уже несколько лет в каждом варианте письменного экзамена по физике для поступающих на физический факультет Новосибирского государственного университета есть задача-оценка. В формулировке такой задачи нет или почти нет необходимых для решения численных значений физических величин; предполагается, что каждый сам сможет их выбрать и задать.

Физическая постановка задачи, выбор и построение простейшей физической модели явления — наиболее важный и вместе с тем трудный этап решения задач-оценок. Нужно правильно отобрать физические параметры, наиболее существенные для задачи, определяющие ее физику, и пренебречь параметрами, слабо влияющими на интересующее нас явление. Для установления связей между различными параметрами существенно правильное использование основных физических законов и определений. Иногда можно ограничиться не очень строгими определениями или качественной трактовкой физических законов.

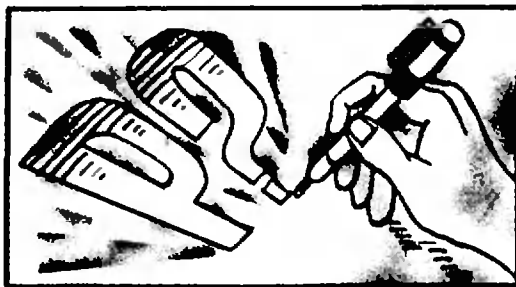
Прежде чем перейти к конкретным задачам, сделаем два небольших замечания. Во-первых, договоримся, что именно мы будем понимать под словами «оценка по порядку величины». Два численных значения какой-либо физической величины считаются отличающимися на порядок, если их отношение примерно равно 10, на два порядка, если оно равно 10^2 , и т. д. С этой точки зрения число 89 должно считаться числом порядка 10^2 , а число 15 — порядка 10. Если же два значения отличаются, например, в 1,3 раза, их нужно считать величинами одного порядка. То же самое относится к случаю, когда имеется отличие в 2,3 или даже в 5 раз. При грубых оценках такие отличия от точного результата не существенны.

Во-вторых, условимся об обозначениях. Наряду со знаком равенства «=» или знака приближенного равенства « $\approx$ » мы будем употреблять значок « $\sim$ ». Обычно он используется для записи факта пропорциональности двух величин. Мы же этим значком будем обозначать равенство по порядку величины, подчеркивая, тем самым, что безразмерные коэффициенты пропорциональности в наших формулах — числа порядка единицы. Еще раз подчеркнем, что отличие коэффициентов «истинных» и «оценочных» в несколько раз для наших целей несущественно.

Теперь рассмотрим несколько сравнительно несложных задач-оценок. Почти все они взяты из вариантов вступительных экзаменов на физический факультет НГУ.

Начнем с задач, в которых физика явления предельно ясна и нужно лишь разумно выбрать конкретные значения соответствующих физических величин.

Задача 1. *Оцените давление шариковой ручки на бумагу при письме.*



Чтобы сделать такую оценку, воспользуемся непосредственно определением давления: $p = F/S$. Теперь надо подумать о том, каковы численные значения силы и площади, входящих в это определение. Каждая линия, которую мы рисуем на бумаге во время письма, состоит из отдельных точек. Точку можно считать кружком, диаметр которого равен ширине следа d , оставляемого на бумаге: $S = \pi d^2/4$. Примем $d \sim 0,2$ мм (что достаточно правдоподобно). Усилие F , прилагаемое к ручке, тоже оценим «на глазок»: оно не превышает веса кисти руки, но заведомо больше веса ручки. Возьмем $F \sim 1$ Н. Тогда

$$p = \frac{F}{S} \sim \frac{4F}{\pi d^2} \sim 3 \cdot 10^7 \text{ Па.}$$

Для того чтобы почувствовать, много это или мало, полезно сравнить полученное значение с каким-либо другим. Представьте себе, что на столе стоит гири массой 1 кг. Ее диаметр в нижней части порядка 4 см, так что гиря оказывает на стол давление порядка $8 \cdot 10^3$ Па. Значит, при письме шариковой ручкой давление на бумагу в несколько тысяч раз

превышает давление килограммовой гири, стоящей на столе.

Задача 2. *Оцените скорость струи пара, выходящего из носика кипящего чайника.*



Пусть мощность нагревателя W , а удельная теплота парообразования воды L . Введем еще один параметр — долю мощности η , идущую на образование пара. Тогда $\eta W/L$ — это масса пара, образующегося в каждую единицу времени. Очевидно, сколько пара образовалось, столько же и выходит из чайника:

$$\frac{\eta W}{L} = \rho v S.$$

Здесь ρ — плотность пара при кипении, v — скорость вытекания пара, S — площадь сечения носика чайника. По закону Менделеева—Клапейрона плотность пара $\rho = \mu/(RT)$, где p — давление, μ — молярная масса воды, R — универсальная газовая постоянная, T — температура пара. Окончательно получаем

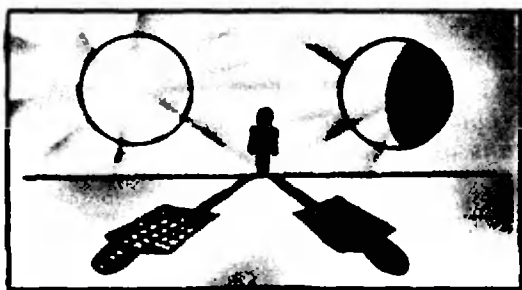
$$v = \frac{\eta W}{L \rho S} = \frac{\eta W R T}{L \mu S}.$$

Если мощность нагревателя $W \sim 1$ кВт, $\eta \sim 0,5$, $S \sim 1$ см², $T \sim 373$ К, $p \sim 10^5$ Па (так как давление насыщенного пара при температуре кипения равно атмосферному давлению), а постоянные величины равны, соответственно, $R = 8,3$ Дж/(кг · К), $L = 4,2$ кДж/кг и $\mu = 18 \cdot 10^{-3}$ кг/моль, то

$$v \sim 2 \text{ м/с.}$$

Задача 3. *Оцените, во сколько раз в погожий солнечный день светлее, чем ночью в полнолуние.*

Прежде всего заметим, что Луна лишь отражает свет, падающий на нее от Солнца. Будем считать,



что освещенность, создаваемая Солнцем на Земле и на Луне, примерно одна и та же и равна E_c . На Луну попадает световая мощность $E_c \pi R^2$ (здесь R — радиус Луны). Луна создает на Земле освещенность $E_l = E_c \pi R^2 k / (2\pi l^2)$, где k — коэффициент отражения света от поверхности Луны, l — расстояние от Луны до Земли (считаем, что Луна равномерно «отбрасывает» отраженный свет внутри телесного угла, равного половине максимального). Теперь найдем отношение освещенностей:

$$\frac{E_c}{E_l} = \frac{2}{k} \left(\frac{l}{R} \right)^2 = \frac{8}{k} \left(\frac{2R}{l} \right)^{-2},$$

где $2R/l$ — угловой размер Луны, равный по порядку величины 0,01 радиана.

Возьмем $k \sim 0,2$, тогда окончательно

$$E_c/E_l \sim 4 \cdot 10^5.$$

Задача 4. *Оцените, на сколько дальше упадет граната, если спортсмен будет бросать ее с разбега.*



Предположим, что при полете гранаты она поднимается на максимальную высоту H . Тогда время полета гранаты равно $2\sqrt{2H/g}$. Если в начальный момент горизонтальная проекция скорости гранаты увеличится на v , а вертикальная проекция

останется практически без изменения, то время полета не изменится, а дальность полета возрастет на

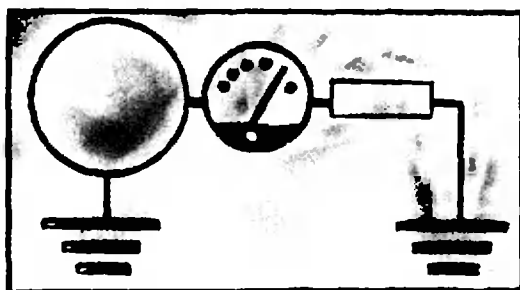
$$l = 2v\sqrt{2H/g}.$$

Разумно считать $H \sim 5$ м, а $v \sim 8$ м/с (вспомните, например, что спринтеры пробегают стометровку за время порядка 10—12 с); следовательно,

$$l \sim 20 \text{ м}.$$

Полученная оценка достаточно разумна.

Задача 5. *Оцените время разрядки металлического заряженного шара, соединенного с Землей через резистор с известным сопротивлением.*



Пусть потенциал заряженного шара ϕ , а заряд $Q = C\phi$, где $C = 4\pi\epsilon_0 a$ — емкость шара (a — радиус шара). После соединения с Землей и потенциал шара, и его заряд станут равными нулю. Во время разрядки по цепи пойдет ток I , который с течением времени будет, конечно, изменяться, но для оценки этим фактором мы пренебрежем. Тогда получаем

$$I \sim \frac{Q}{t} \sim \frac{\phi}{R},$$

где R — сопротивление резистора, t — время разрядки. Отсюда

$$t \sim \frac{QR}{\phi} = CR = 4\pi\epsilon_0 aR.$$

При $a \sim 1$ м, $R \sim 1$ МОм и $\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12}$ Ф/м

$$t \sim 10^{-4} \text{ с}.$$

* * *

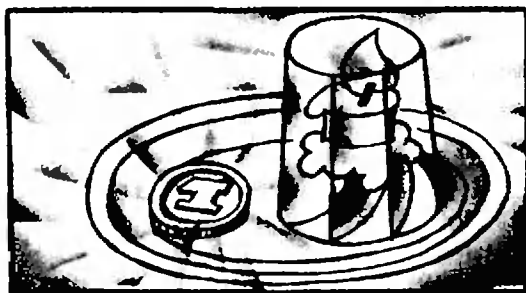
В «Занимательной физике» Я. И. Перельмана есть рассказ, который называется «Сухим из воды». Он начинается так: «Положите монету на большую плоскую тарелку, налейте столько воды, чтобы она

покрыла монету, и предложите гостям взять ее прямо руками, не замочив пальцев.

Эта, казалось бы, невозможная задача довольно просто решается с помощью стакана и горящей бумажки. Зажгите бумажку, положите ее горящей внутрь стакана и быстро поставьте стакан на тарелку вблизи монеты вверх дном. Бумажка погаснет, стакан наполнится белым дымом, а затем под ним сама собой соберется вся вода с тарелки. Монета же, конечно, останется на месте, и через минуту, когда она обсохнет, вы сможете взять ее, не замочив пальцев».

Давайте в связи с этим рассказом решим такую задачу.

Задача 6. *Оцените минимальную температуру, до которой должен нагреться стакан, чтобы в него после остывания оказалась втянутой вся вода из тарелки.*



Решим сначала задачу точно (конечно, в рамках некоторых предположений, о которых позже скажем). Когда стакан подносят к поверхности воды, давление воздуха в нем равно атмосферному давлению p_a , а его температура T_x не известна. Когда стакан остынет и в него окажется втянутой масса воды m , давление воздуха в нем будет p , температура станет равной температуре T окружающего воздуха, а объем уменьшится на величину объема вошедшей воды, то есть станет равным $(Sl - m/\rho)$, где S и l — площадь сечения стакана и его высота, ρ — плотность воды. Согласно закону Менделеева—Клапейрона,

$$\frac{p_a Sl}{T_x} = \frac{pS(l - m/(\rho S))}{T}.$$

Из условия равновесия столбика воды следует, что $pS + mg = p_a S$, тогда

$$T_x = T \frac{1}{1 - \frac{mg}{p_a S}} \frac{1}{1 - \frac{m}{\rho l S}}.$$

Укажем теперь те неявные допущения, которые мы сделали при решении. Мы считали, что температура воздуха в стакане совпадает с температурой его стенок; что стакан ставится на воду медленно, так что начальное давление в нем совпадает с атмосферным; что давлением водяных паров в стакане можно пренебречь; что капиллярные эффекты пренебрежимо малы.

Интересно, что в полученную формулу для T_x учет изменения давления (обусловленного вошедшим в стакан водяным столбиком) и учет изменения объема воздуха в стакане вошли в виде независимых сомножителей. Поэтому их влияние можно исследовать отдельно.

Преобразуем первый сомножитель из правой части указанной формулы:

$$\frac{1}{1 - \frac{mg}{p_a S}} = \frac{1}{1 - \frac{\rho_{\text{вод}}}{\rho_a}} \approx 1 + \frac{\rho_{\text{вод}}}{\rho_a}.$$

Атмосферное давление соответствует давлению водяного столба высотой 10 м, а в нашем случае ясно, что высота вошедшего в стакан столбика воды не может превышать высоту стакана, то есть приблизительно 10 см, поэтому давлением водяного столбика пренебречь и считать этот множитель приближенно равным единице:

$$\frac{1}{1 - \frac{mg}{p_a S}} \approx 1.$$

Второй сомножитель связан с изменением объема воздуха в стакане. Объем воды и объем стакана уже не различаются столь сильно, как давления, поэтому объемом воды пренебречь нельзя.

Таким образом,

$$T_x \approx \frac{T}{1 - \frac{m}{\rho l S}}.$$

Выберем численные значения параметров такими: $T \sim 300$ К, $m \sim 30$ г, $l \sim 10$ см и $S \sim 20$ см² (поскольку объем стакана равен 200 см³, а его высота $l \sim 10$ см). Тогда

$$T_x \sim 353 \text{ К, или } t \sim 80^\circ\text{С.}$$

Поправка из-за учета изменения давления равна $\Delta T_x \approx T_x \frac{mg}{p_a S} \sim 0,1$ К,

что, конечно же, мало по сравнению с найденным значением T_x . Получилось довольно забавно, что в результате мы пренебрегли эффектом изменения давления воздуха при остывании — эффектом, который, собственно, и создал задачу.

* * *

Иногда в задаче встречается значительно более сложная ситуация, и подход к получению оценок соответственно усложняется. Вот пример.

Задача 7. *Оцените частоту звука, генерируемого летящим комаром.*



Естественно предположить, что звук здесь возникает от периодического взмахивания крылышек комара. На самом деле физика явлений при полете комара очень непростая. Мы будем пользоваться самой грубой моделью, считая, что взмахами крылышек создается такое изменение импульса воздуха в единицу времени, которое обеспечивает компенсацию действующей на комара силы тяжести:

$$\Delta p / \Delta t = mg.$$

За время Δt движения крылышек площадью S со скоростью v отбрасывается вниз масса воздуха $\Delta m = \rho_0 v \Delta t S$, при этом ей сообщается импульс $\Delta p = \Delta m v = \rho_0 v^2 \Delta t S$. Это создает силу F , действующую на кры-

лышко вверх:

$$F \sim \Delta p / \Delta t \sim \rho_0 v^2 S,$$

где ρ_0 — плотность воздуха. Введем характерный размер комара, например его длину $l \sim 4$ мм. Площадь пары крыльев $S \sim l^2$ (мы считаем, что длина комара того же порядка, что и размах его крыльев). Объем же комара разумно оценить как $\frac{1}{10} l^3$,

поскольку поперечные размеры комара без крылышек заметно меньше его длины. Плотность комара примем равной плотности воды $\rho_{\text{вод}}$. Введем частоту взмахов крылышек ν , тогда скорость крыла $v \sim l \nu$. Записав условие равновесия комара

$$F \sim \rho_0 v^2 l^2 \sim \rho_0 \nu^2 l^4 = mg \sim \rho_{\text{вод}} l^3 g / 10,$$

получаем

$$\nu_{\text{зв}} \sim \nu \sim \left(\frac{\rho_{\text{вод}} g}{10 \rho_0 l} \right)^{1/2} \sim 400 \text{ Гц.}$$

Разумеется, цифре «4» верить нельзя, но в целом результат дает для частоты разумный порядок величины.

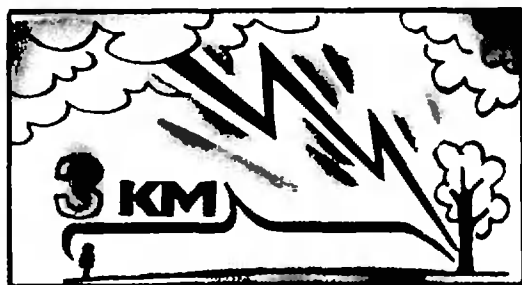
Заметим, что из полученной формулы следует, что частота обратно пропорциональна $\sqrt{l}$. Другими словами, чем крупнее насекомое, тем ниже издаваемый им звук. Действительно, сравните басовитое гудение шмеля (или жужжание пчелы) с тонким, звенящим звуком комара.

* * *

Довольно часто при решении задач-оценок применяется метод размерностей^{*)}. В этом методе явно используется предположение о том, что параметры задачи входят в результат в виде сомножителей. Численные коэффициенты только из соображений размерностей получить нельзя. Иногда их можно определить из какого-нибудь частного случая, чаще эти коэффициенты условно полагают равными единице. Последнее может быть допустимо, если речь идет об оценке лишь по порядку величины. Проиллюстрируем применение метода размерностей на конкретной задаче.

^{*)} См., например, статью Ю. Брука и А. Стаценко «Метод размерностей помогает решать задачи» («Квант», 1981, № 6).

Задача 8. Оцените время, через которое вы услышите гром после вспышки молнии, если известно, что молния ударила в дерево, находящееся от вас на расстоянии около 3 км.



Поскольку свет распространяется со скоростью $\approx 3 \cdot 10^5$ км/с, вспышку молнии можно будет увидеть через время $\sim 10^{-5}$ с. Звук же идет гораздо дольше. Попробуем оценить скорость распространения звуковых колебаний в воздухе. Воспользуемся для этого методом размерностей.

Очевидно, что скорость v звука зависит от параметров, характеризующих эту среду. Пусть для воздуха это будут давление p и плотность ρ . Предположим теперь, что

$$v \sim p^x \rho^y,$$

где x и y — неизвестные пока числа. Если подобная формула действительно существует, то размерности ее левой и правой частей должны быть, конечно, одинаковы.

Условимся размерность физической величины A обозначать $[A]$. Тогда

$$[v] = \text{м} \cdot \text{с}^{-1}, \\ [p] = \text{Па} = \text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2}, \\ [\rho] = \text{кг} \cdot \text{м}^{-3},$$

и можно записать

$$\text{м} \cdot \text{с}^{-1} = (\text{кг} \cdot \text{м}^{-1} \cdot \text{с}^{-2})^x (\text{кг} \cdot \text{м}^{-3})^y.$$

Это равенство выполняется при условии, что

$$\begin{aligned} x + y &= 0, \\ -x - 3y &= 1, \\ -2x &= -1. \end{aligned}$$

Отсюда

$$x = \frac{1}{2} \text{ и } y = -\frac{1}{2},$$

поэтому получаем

$$v \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}}.$$

Численный коэффициент в этой формуле из соображений размерностей определить нельзя. Предположим, что он порядка единицы (вообще говоря, это нужно было бы как-то проверить).

Для оценки скорости звука давление воздуха примем равным нормальному атмосферному давлению: $p \sim 1 \text{ атм} \sim 10^5 \text{ Па}$, а плотность воздуха будем считать равной плотности при нормальных условиях: $\rho \sim 1,3 \text{ кг/м}^3$. Тогда скорость звука

$$v \sim \sqrt{\frac{p}{\rho}} \sim 300 \text{ м/с},$$

и время, через которое наблюдатель услышит гром,

$$t \sim \frac{3 \cdot 10^3 \text{ м}}{300 \text{ м/с}} \sim 10 \text{ с}.$$

Это время на шесть порядков больше времени распространения света, что вполне разумно с точки зрения нашего жизненного опыта.

В заключение предлагается еще несколько задач-оценок. Попробуйте, не заглядывая в ответ, получить необходимые оценки самостоятельно.

Задачи для размышлений

1. Оцените, как изменится давление атмосферы, если вся вода в океанах испарится.
2. Оцените скорость опускания парашютиста с раскрытым парашютом.
3. Оцените среднюю плотность Солнца.
4. Оцените, сколько оборотов (кувырков) совершит автомобиль, на полной скорости свободно упавший в километровую пропасть.
5. Оцените усилие спортсмена при толкании ядра.
6. Оцените силу натяжения цепи велосипеда при езде в гору.
7. Оцените, с какой скоростью летела капля воды, если при ударе о неподвижную стенку она оказывает на нее среднее давление порядка 10^6 Па .
8. Оцените силу натяжения ремней безопасности, удерживающих человека в автомобиле, если автомобиль, движущийся со скоростью порядка 30 км/ч, столкнулся со столбом, в результате чего у автомобиля получилась вмятина глубиной порядка 30 см.
9. Оцените, на сколько отличаются расстояния уровней мирового океана до центра Земли на полюсе и на экваторе.
10. Оцените, на каком расстоянии человек в яркой одежде, уходя в сосновый лес, потеряется из виду. (Подлеска нет.)