

КАК ПРОВЕРИТЬ ОТВЕТ

Р. Г. Минц

Наверное, у каждого после, казалось бы, исчерпывающего решения задачи иногда возникает ощущение, будто что-то здесь все-таки не так. Подобное состояние особенно естественно, если задача принципиально новая или если решение было громоздким. Как следует поступать в таком случае? Как убедиться хотя бы в том, что ответ не является заведомо неверным? Самый естественный способ самопроверки в подобной ситуации — исследование ответа. Заметим сразу, что для этого не существует универсальной схемы. Можно лишь выделить несколько сравнительно часто встречающихся случаев.

Поэтому наш рассказ построен следующим образом. Прежде всего сформулированы четыре задачи. К каждой задаче дано по три ответа, два из которых неверны. Постараемся, не решая задачи, определить, какой из ответов правильный. В конце статьи приведены решения.

Задача 1. Автомобиль проехал первую половину пути со скоростью v_1 , а вторую — со скоростью v_2 . Чему равна средняя скорость движения автомобиля?

Отв е т ы:

- 1) $v_{cp} = \frac{v_1 + v_2}{2}$.
- 2) $v_{cp} = v_1 + \frac{v_1 v_2}{2(v_1 + v_2)}$.
- 3) $v_{cp} = 2 \frac{v_1 v_2}{v_1 + v_2}$.

Первая проверка, которую должен пройти ответ, — это его размерность. Очевидно, что в случае 1) дело обстоит неблагоприятно именно в этом отношении. Ответ имеет размерность обратной скорости $\left(\frac{\text{сек}}{\text{см}}\right)$. Покажем, что неверен и второй ответ. Постараемся понять, в чем дело. Для этого перечи-

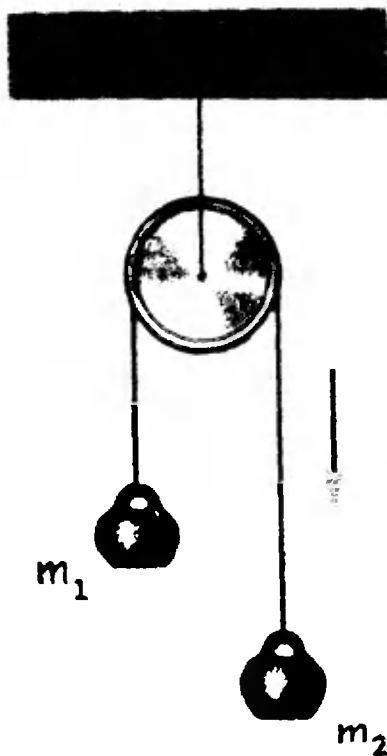


Рис. 1.

таем еще раз условие задачи. Легко видеть, что по отношению к поставленному вопросу скорости v_1 и v_2 равноправны, то есть несущественно, какую именно половину пути автомобиль двигался со скоростью v_1 , а какую со скоростью v_2 . Это означает, что при замене v_1 на v_2 , а v_2 на v_1 ответ не должен изменяться. В таком случае говорят о симметрии относительно v_1 и v_2 . Прделав указанную замену во втором ответе, получаем

$$v_{cp} = v_2 + \frac{v_1 v_2}{2(v_1 + v_2)} \neq v_1 + \frac{v_1 v_2}{2(v_1 + v_2)}.$$

Таким образом, правильным является третий ответ.

Задача 2. Два груза с массами m_1 и m_2 подвешены на нити, перекинутой через блок (рис. 1). Считая

нить и блок невесомыми и пренебрегая трением, определить ускорение грузов a_1 и a_2 и натяжение нити T .

О т в е т ы: 1) $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g$;

$$a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g; \quad T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

2) $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1} g; \quad a_2 = \frac{m_1 - m_2}{m_1} g$;

$$T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

3) $a_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} g; \quad a_2 = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g$;

$$T = (m_1 + m_2) g.$$

Положительным мы считаем направление, обозначенное на рисунке стрелкой.

Как и в предыдущей задаче, прежде всего проверим размерность. Нетрудно убедиться, что во всех трех случаях правая и левая части каждой формулы имеют одинаковую размерность. После этого можно идти дальше. Обратите внимание на то, что если грузы m_1 и m_2 поменять местами, то натяжение нити не изменится, то есть выражение для силы натяжения должно быть симметрично относительно m_1 и m_2 . Все ответы выдерживают и эту проверку.

Нетрудно увидеть, что во втором случае допущена ошибка. Действительно, ведь грузы m_1 и m_2 висят на одной нити. Значит, если масса m_1 движется с ускорением a_1 , то масса m_2 должна двигаться с ускорением $-a_1$ (кинематическая связь), что не выполняется во втором ответе.

Итак, нам осталось сделать выбор между первым и третьим результатами. Они отличаются лишь формулой для величины натяжения нити. Будем рассуждать так: пусть какая-либо масса, например m_1 , равна нулю. Совершенно очевидно, что в этом случае второй груз свободно падает, и нить не натянута. Этот же результат, конечно, должен получиться и из

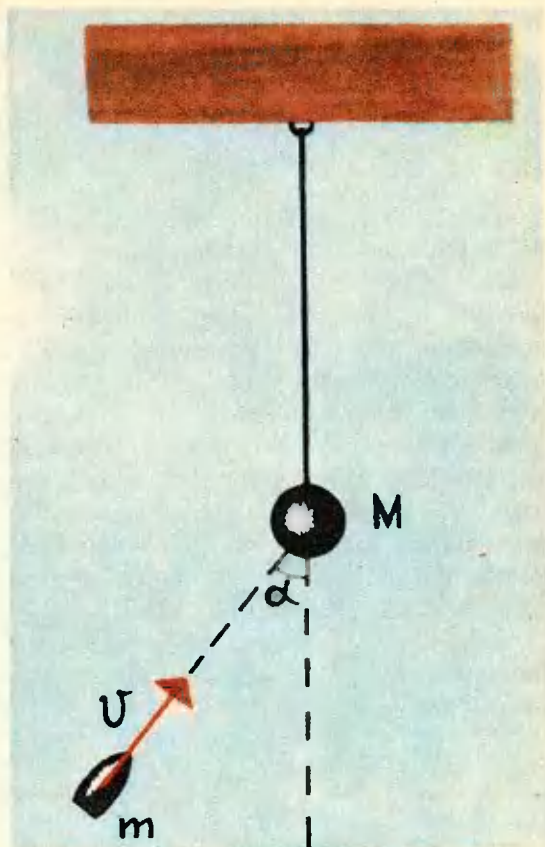


Рис. 2.

правильного ответа, если в него подставить значение $m_1 = 0$. Проведя это, найдем, что $T = m_2 g$ в третьем случае и $T = 0$ в первом. Это означает, что верен первый ответ.

Задача 3. В покоящийся шар массы M , подвешенный шарнирно на несжимаемом стержне, попадает пуля массы m , летевшая со скоростью v под углом α к стержню (рис. 2). Какое количество тепла Q при этом выделится и на какую высоту h , откачнувшись, поднимется шар, если пуля в нем застрянет?

О т в е т ы:

1) $h = \frac{v^2}{2g} \sin^2 \alpha \left(\frac{m}{m + M} \right)^2$;

$$Q = \frac{mv^2}{2} \frac{m \cos^2 \alpha + M}{m + M}.$$

2) $h = \frac{(mv)^2}{2(m + M)}$;

$$Q = \frac{m^2 v^2 \cos^2 \alpha + M^2}{2(m + M)}$$

$$3) h = \cos^2 \alpha \frac{(Mv)^2}{2g(m+M)^2};$$

$$Q = \frac{mv^2}{2} \frac{m \cos^2 \alpha + M}{M}.$$

Первая проверка, как всегда, — размерность. Однако не будем спешить. Как это сделать достаточно быстро и просто? Раскроем небольшой секрет: увидеть размерность соотношения гораздо легче, если предварительно преобразовать его следующим образом: из входящих в формулу параметров нужно постараться выделить безразмерные отношения, причем сделать это так, чтобы оставшаяся размерная комбинация была максимально простой или знакомой.

Именно к такому виду приведен первый ответ. Сделаем подобное преобразование для второго:

$$h = \frac{(mv)^2}{2(m+M)} = \frac{mv^2}{2} \frac{m}{m+M};$$

$$Q = \frac{mv^2}{2(m+M)} \left[\left(\frac{M}{m} \right)^2 + v^2 \cos^2 \alpha \right].$$

Теперь видно, что оба соотношения неверны. В первом случае правая часть имеет размерность энергии, а левая — длины. Во втором случае в скобках стоит сумма размерной $v^2 \cos^2 \alpha$ и безразмерной $\left(\frac{M}{m}\right)^2$ величин, чего также быть не должно. С помощью аналогичного преобразования убедитесь в том, что размерность третьего ответа правильна. К сожалению, в отличие от двух предыдущих задач, в условии отсутствует какая-либо симметрия. Давайте поэтому выделим такое значение какого-либо параметра, при котором ответ очевиден, и проверим, получается ли он из наших формул. Пусть, например, угол $\alpha = 0$. Тогда ясно, что шар не сдвинется, то есть высота подъема h равна нулю, а вся кинетическая энергия нули $\frac{mv^2}{2}$ перешла в тепло. Подставив значение $\alpha = 0$ в первый и третий результаты, получим:

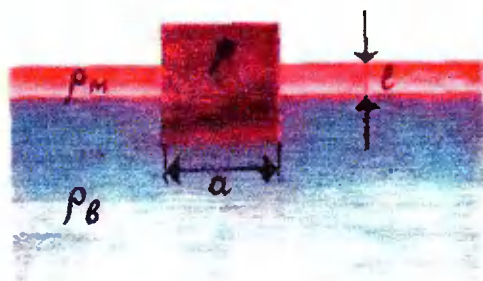


Рис. 3.

$$1) h = 0; \quad Q = \frac{mv^2}{2}.$$

$$3) h = \frac{v^2}{2g} \left(\frac{M}{m+M} \right)^2 \neq 0;$$

$$Q = \frac{mv^2}{2} \frac{m+M}{M} > \frac{mv^2}{2}.$$

Таким образом, правилен первый ответ.

Отметим еще, что для самопроверки можно использовать ситуации при $m = 0$ или $M \rightarrow \infty$. Попробуйте сделать это сами.

Задача 4. Деревянный кубик со стороной a , плотность которого ρ , плавает в воде. Каким будет изменение глубины погружения кубика Δh , если на воду налить слой масла толщиной l (рис. 3)? Плотность воды и масла ρ_v и ρ_m соответственно.

О т в е т ы:

$$1) \Delta h = \frac{\rho_m - \rho_v}{\rho} (a - l).$$

$$2) \Delta h = \frac{l(\rho_v - \rho_m)}{\rho_v}.$$

$$3) \Delta h = l \frac{\rho_v + \rho_m}{\rho_m}.$$

Сразу видно, что размерность у всех трех ответов правильна, а симметрия в задаче отсутствует.

Попробуем проверить наши ответы на каком-нибудь очевидном случае. Если $l = 0$ (то есть масла нет), то глубина погружения не должна измениться ($\Delta h = 0$). Ясно, что первый ответ, из которого в

случае $l=0$ получается $\Delta h = \frac{\rho_m - \rho_v}{\rho} a$,

неверен.

Рассмотрим теперь другую возможную ситуацию. Допустим, что плотность масла равна плотности воды. Очевидно, что и в этом случае глубина погружения кубика не изменится. Третий ответ, как легко заметить, этому условию не удовлетворяет. Таким образом, правильным является второй ответ.

Теперь, пожалуй, пора подвести некоторые итоги. Как же исследовать ответ?

Мы уже видели, что прежде всего надо убедиться в правильной размерности. Делать это лучше всего в буквенном виде, выделяя соответствующие безразмерные и размерные комбинации.

Следующий шаг состоит в изучении симметрии задачи. Если в условие какие-либо параметры входят равноправно, то и в ответ они должны входить равноправным образом (симметрично). Иногда симметрию задачи легче обнаружить по виду самого ответа. Что имеется в виду? Представьте себе, что исследуемый ответ симметричен относительно каких-то однотипных параметров (например, две массы, две скорости и так далее). Тогда нужно проверить, обладает ли этой же симметрией условие задачи. Если нет, то ответ неверен.

Другой удобный способ проверки состоит в следующем: полученный результат зависит от параметров задачи (например, от массы, начальной скорости, угла, емкости, ...). Постараемся, изменяя какой-либо параметр x , свести задачу к известной или к такой, ответ которой очевиден. Допустим, что это нам удалось и мы знаем правильный ответ при $x = x_0$. Тогда проверка состоит в сравнении этого результата с нашим при $x = x_0$. Заметим, что чаще всего приходится прибегать именно к этому способу проверки. Но для того, чтобы успешно его применять, нужно хорошо понять физическую сторону задачи.

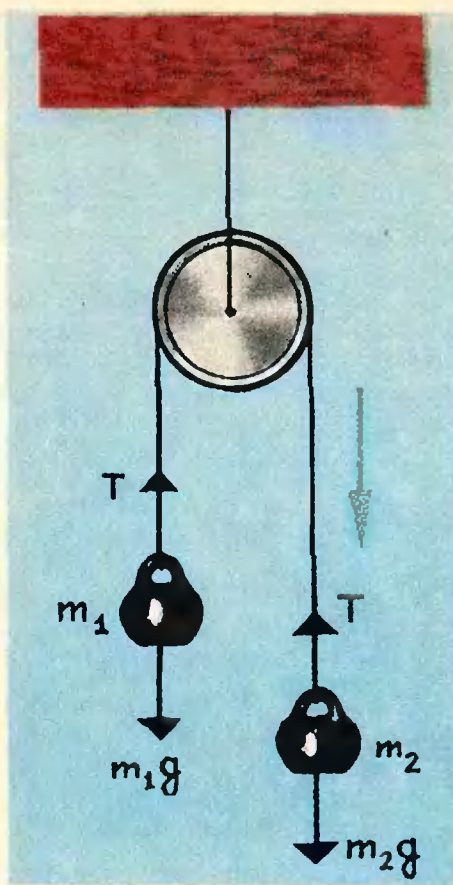


Рис. 4.

Приведем теперь подробное решение предложенных задач.

Задача 1. Средняя скорость $v_{\text{ср}}$ равна $\frac{S}{t}$, где S — путь, а t — время, за которое этот путь пройден.

$$t = \frac{S}{2v_1} + \frac{S}{2v_2} = \frac{S(v_1 + v_2)}{2v_1v_2}.$$

Подставляя это выражение для t в формулу для $v_{\text{ср}}$, получаем

$$v_{\text{ср}} = \frac{S \cdot 2v_1v_2}{S(v_1 + v_2)} = 2 \frac{v_1v_2}{v_1 + v_2}.$$

Задача 2. Вследствие того, что нить нерастяжима и невесома, $a_2 = -a_1 = a$ (кинематическая связь) и натяжение нити всюду одно и то же (рис. 4). Запишем уравнение движения грузов:

$$-m_1a = m_1g - T \text{ и } m_2a = m_2g - T.$$

Решая эту систему относительно a и T , найдем

$$a = \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} g, \quad T = 2 \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} g.$$

Задача 3. В начальный момент шар может двигаться лишь горизонтально. Применяя в системе шар — пуля закон сохранения

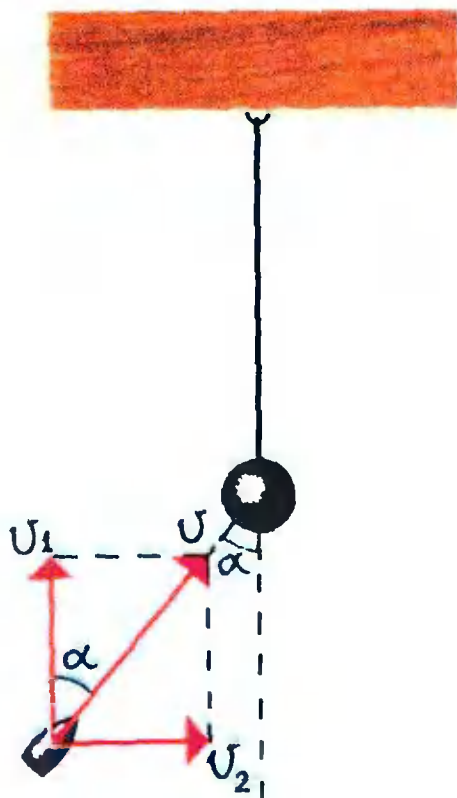


Рис. 5.

ния импульса (количества движения), получим $mu \sin \alpha = (M+m)v'$, где v' — скорость пули и шара сразу после попадания пули в шар (рис. 5).

Из закона сохранения механической энергии следует, что

$$\frac{(M+m)v'^2}{2} = (M+m)gh,$$

откуда

$$h = \frac{v'^2}{2g} \sin^2 \alpha \left(\frac{m}{M+m} \right)^2.$$

Количество выделившегося тепла равно разности начальной кинетической энергии пули и кинетической энергии шара сразу после попадания пули в шар:

$$Q = \frac{mv^2}{2} - \frac{(m+M)v'^2}{2} = \frac{mv^2}{2} - \frac{m \cos^2 \alpha + M}{m+M}.$$

Задача 4. На кубик, погруженный в воду и масло, действует выталкивающая сила $F = \rho_M g l a^2 + \rho_B g x a^2$ (рис. 6). Эта сила должна быть равна силе тяжести, действующей на кубик: $P = \rho g a^3$. Приравняв эти два соотношения, получаем $\rho a = \rho_M l + \rho_B x$, откуда глубина погружения $h_1 = x + l = \frac{\rho a}{\rho_B} - \frac{l \rho_M}{\rho_B} + l$. Если масло отсутствует

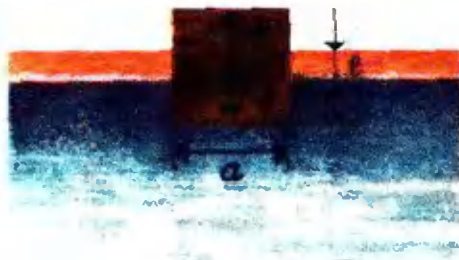


Рис. 6.

($l=0$), то глубина погружения равна $h_0 = a \frac{\rho}{\rho_B}$. Таким образом, изменение глубины погружения равно

$$\Delta h = h_1 - h_0 = l - l \frac{\rho_M}{\rho_B} = \frac{\rho_B - \rho_M}{\rho_B} l.$$

Попробуйте теперь самостоятельно разобраться, какой из ответов правильный в следующих задачах.

1. Человек массы m находится на носу лодки, которая стоит на воде. Длина лодки L , масса M . Человек переходит на корму. На какое расстояние l и b переместятся лодка и человек относительно берега?

Ответы:

$$1) \quad l = \frac{L}{m+M}, \quad b = \frac{LM}{m(M+m)};$$

$$2) \quad l = \frac{m}{m+M} L, \quad b = \frac{M}{M+m} L;$$

$$3) \quad l = \frac{M}{m+M} L, \quad b = \frac{m}{m+M} L.$$

2. Шар радиуса R и массы m стоит перед ступенькой высоты h (рис. 7). Какую минимальную горизонтальную силу нужно приложить к центру шара, чтобы он поднялся на ступеньку?

Ответы:

$$1) \quad F \geq mg \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R-h};$$

$$2) \quad F \geq mg \frac{\sqrt{h(2R-h)}}{R};$$

$$3) \quad F \geq mg \frac{2R-h}{R-h}.$$

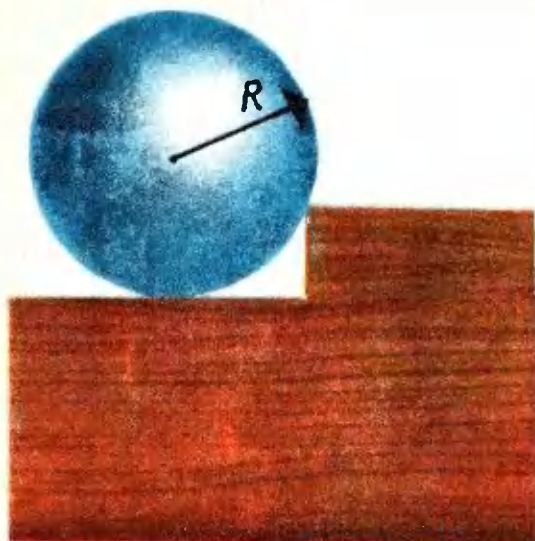


Рис. 7.

3. Тело массы m движется вертикально с ускорением a . Определить, какая сила F действует на тело.

Ответы:

$$1) F = m(g + a); \quad 2) F = m(g - a);$$

$$3) F = m \frac{ga}{g + a}.$$

4. Две линзы с фокусными расстояниями F_1 и F_2 составлены вплотную (рис. 8). Определить фокусное расстояние такой системы.

Ответы:

$$1) F = F_1 + F_2;$$

$$2) F = \frac{F_1 F_2}{F_1 + F_2};$$

$$3) F = \frac{F_1 F_2}{F_1 - F_2}.$$

5. Два заряженных шара радиусов R_1 и R_2 находятся один от другого на расстоянии, много большем их радиусов. Заряды шаров q_1 и q_2 соответственно. Найти заряды q_1' , q_2' и потенциал φ шаров после того, как их соединили проволокой.

Ответы:

$$1) q_1' = q_1 \frac{R_1}{R_2}; \quad q_2' = q_2 \frac{R_2}{R_1};$$

$$\varphi = \frac{(q_1 - q_2)}{R_1 + R_2}.$$

$$2) q_1' = \frac{(q_1 + q_2) R_1}{R_1 - R_2};$$

$$q_2' = -\frac{(q_1 + q_2) R_2}{R_1 - R_2};$$

$$\varphi = \frac{q_1 + q_2}{R_1 - R_2}.$$

$$3) q_1' = \frac{(q_1 + q_2) R_1}{R_1 + R_2};$$

$$q_2' = \frac{(q_1 + q_2) R_2}{R_1 + R_2};$$

$$\varphi = \frac{q_1 + q_2}{R_1 + R_2}.$$

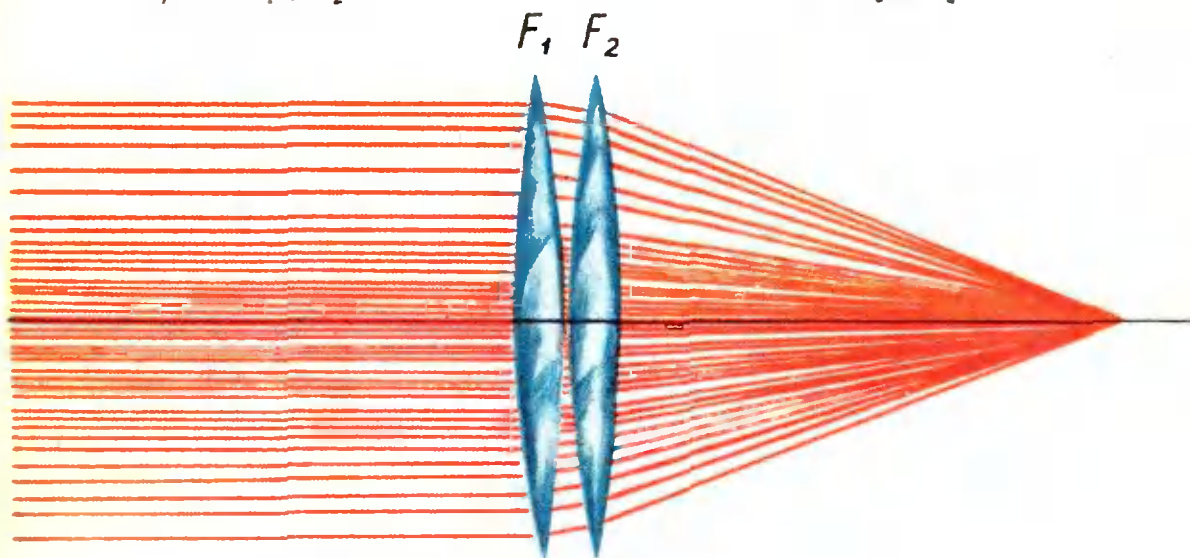


Рис. 8