Заяц Алексей Евгеньевич
к. ф.-м. н., педагог дополнительного образования
МАОУ «Лицей №131», г. Казань

Кинематические связи в задачах с блоками

В статье рассмотрен простой и полезный способ получения кинематических соотношений в задачах с подвижными блоками.

1. В задачах по динамике тел со связями, помимо определения сил, действующих на эти тела, необходимо установить различные соотношения между их ускорениями и/или скоростями (такие соотношения называются «кинематические связи»). Частным, но весьма распространённым случаем является ситуация, когда система состоит из грузов, соединённых между собой натянутыми и нерастяжимыми нитями, перекинутыми через совокупность подвижных и неподвижных блоков.

Обычно кинематические связи в подобных системах определяются следующим образом: рассматривают связи между смещениями грузов и блоков с учётом постоянства длин всех нитей, а затем от смещений переходят к скоростям и ускорениям. В сложных случаях такой подход требует введения системы координат и выражения длины каждой нити через координаты её концов и координаты блоков, через которые она перекинута.

Однако в простейшем случае, когда они движутся параллельно одной и той же прямой, можно использовать альтернативный метод, о котором и пойдёт речь ниже.

2. Сначала рассмотрим одну важную вспомогательную задачу (см., например, [1]). Пусть отрезки натянутой нерастяжимой нити, перекинутой через блок, параллельны друг другу. Будем считать, что концы этой нити движутся со скоростями $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$, центр блока – со скоростью $\vec{v}_б$, и все эти три вектора направлены вдоль нити (рис. 1). Найдём связь между указанными скоростями.

Для решения задачи перейдём в систему отсчёта, движущуюся поступательно вместе с центром блока. В ней блок (здесь и далее подразумевается центр блока) неподвижен, а концы нити движутся со скоростями $\vec{v}'_1 = \vec{v}_1 - \vec{v}_б$ и $\vec{v}'_2 = \vec{v}_2 - \vec{v}_б$ соответственно (рис. 2).

Так как блок неподвижен, концы нити должны двигаться с одинаковыми по модулю и противоположными

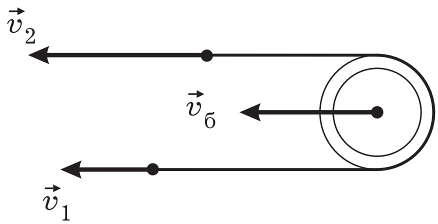

Рис. 1

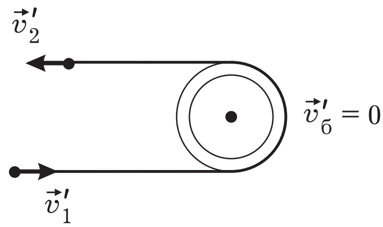

Рис. 2

по направлению скоростями, поэтому $\vec{v}\,'_2 = -\vec{v}\,'_1$. Возвращаясь в исходную систему отсчёта, мы получим, что

$$\vec{v}_2 - \vec{v}_б = -(\vec{v}_1 - \vec{v}_б),$$

откуда

$$\vec{v}_б = \frac{\vec{v}_1 + \vec{v}_2}{2}, \qquad (1)$$

или, учитывая, что все три вектора скоростей параллельны друг другу,

$$v_б = \frac{v_1 + v_2}{2}, \qquad (2)$$

где символы без значка вектора обозначают проекции скоростей на ось, направленную вдоль нитей.

Если же скорости (рис. 1) изменяются со временем, при этом оставаясь параллельными нитям, ускорения концов и центра блока будут связаны аналогичным формуле (1) соотношением

$$\vec{a}_б = \frac{\vec{a}_1 + \vec{a}_2}{2}, \qquad (3)$$

или в проекции на ось вдоль нитей –

$$a_б = \frac{a_1 + a_2}{2}. \qquad (4)$$

Найденные формулы (2) и (4), говорящие, что в рассматриваемой системе проекции скорости или ускорения центра блока равны среднему арифметическому проекций скоростей (или, соответственно, ускорений) концов нити, являются краеугольным камнем нашего метода.

3. Рассмотрим применение полученных формул. В дальнейшем мы, для определённости, будем говорить только о кинематических связях между скоростями, понимая, что ровно такие же связи будут и между ускорениями.

Пример 1. Свободный конец нити (рис. 3) опускают со скоростью v. Определите скорость подъёма груза.

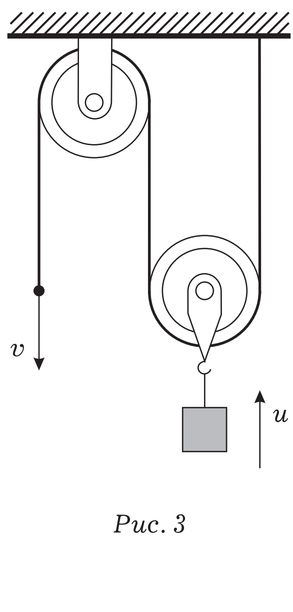

Рис. 3

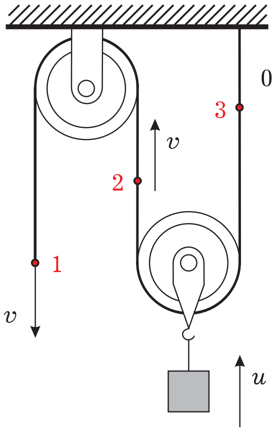

Рис. 4

Решение: Отметим на каждом вертикальном участке нити некоторую точку (на рис. 4 обозначены красным цветом) и определим её скорость. Скорость точки №1 по условию равна v и направлена вниз, а так как левый блок в этой системе неподвижен, то и скорость точки №2 также равна v и направлена вверх. Точка №3 неподвижна, поскольку она находится на участке нити, прикреплённом к потолку. Отсюда, используя кинематическую связь между скоростями частей нити и блока (формула (1)), получим, что

$$u = \frac{v+0}{2} = \frac{v}{2}.$$

Пример 2. Свободный конец нити (рис. 5) опускают со скоростью v. Определите скорость u подъёма груза.

Решение: Снова отметим на каждом вертикальном участке нити некоторую точку (рис. 6) и определим её скорость. Начнём с правого конца. Скорость точки №6 равна u и направлена вверх, а так как правый верхний блок в этой системе неподвижен, то и скорость точки №5 также равна u и направлена вниз. Скорость точки №4 найдём, используя кинематическую связь и тот факт, что скорости всех блоков, прикреплённых к грузу, совпадают со скоростью груза u:

$$u = \frac{v_4 - u}{2} \Rightarrow v_4 = 3u.$$

Отметим, что знак «минус» здесь появился из-за того, что скорость точки №5 направлена вниз, в отличие от скоростей блока и точки №4, и её проекция на ось, направленную по вектору $\vec{u}$, будет отрицательной.

Так как средний верхний блок также неподвижен, скорость точки №3 равна $3u$ и снова направлена вниз. Скорость точки №2 найдём, опять используя кинематическую связь и тот факт, что скорости всех

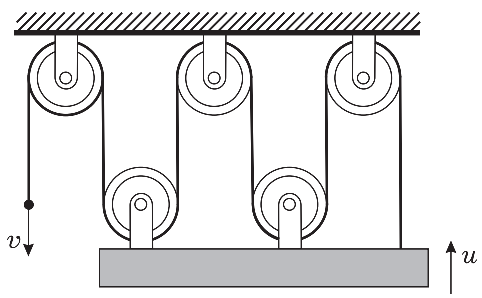

Рис. 5

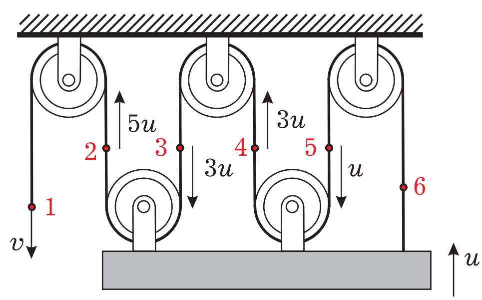

Рис. 6

блоков, прикреплённых к грузу, совпадают со скоростью груза u:

$$u=\frac{v_2-3u}{2}\Rightarrow v_2=5u.$$

Наконец, скорость точки №1 из-за неподвижности левого верхнего блока также равна $5u$.

Отсюда получим, что

$$v=5u \;\Rightarrow\; u=\frac{v}{5}.$$

С одной стороны, приведённые выше примеры смотрятся как «стрельба из пушки по воробьям». Гораздо проще и быстрее решить их, используя связи между смещениями груза и конца нити. С другой стороны, рассмотренные примеры позволили нам «обкатать» методику, чтобы затем применить её в более сложных случаях. Кроме того, если бы вдруг потребовалось найти скорость (или ускорение), скажем, точки №3 во втором примере, то предлагаемый нами метод был бы весьма полезен.

4. Перейдём теперь к более сложным системам.

Пример 3. Определите скорости u_1 и u_2 движения первого и второго грузов в системе, изображённой на рис. 7, если нижний блок опускается со скоростью v.

Решение: Пусть скорость первого груза u_1, для определённости, направлена вниз (если это не так, мы просто получим отрицательное значение).

На остальных вертикальных участках нитей снова отметим какие-нибудь точки (рис. 8) и определим их скорость. Скорости точек №3 и №6, очевидно, равны нулю, а скорость точки №5 равна u_1 и на-

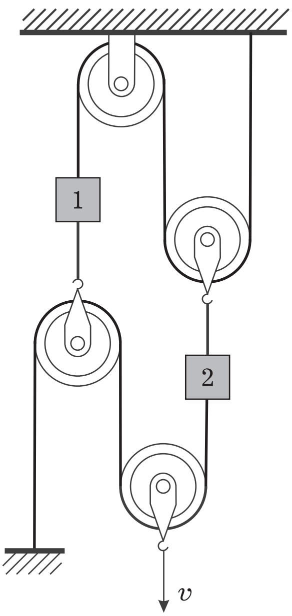

Рис. 7

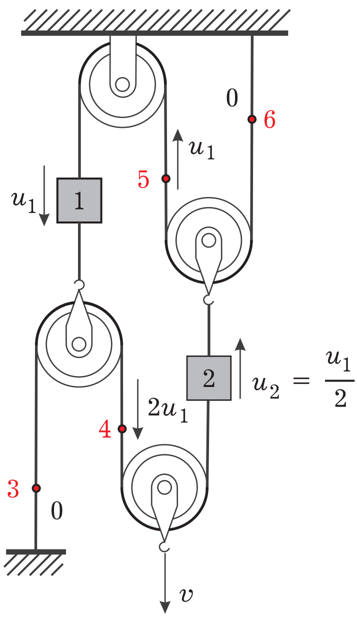

Рис. 8

правлена вверх. Скорость второго груза равна среднему арифметическому скоростей точек №5 и №6, то есть $u_2 = u_1/2$, и тоже направлена вверх. В свою очередь, скорость первого груза равна среднему арифметическому скоростей точек №3 и №4:

$$u_1 = \frac{v_4 + 0}{2} \Rightarrow v_4 = 2u_1.$$

Наконец, запишем кинематическую связь для самого нижнего блока, учитывая, что скорость второго груза направлена в противоположную сторону относительно скоростей блока и точки №4:

$$v = \frac{2u_1 - u_1/2}{2} \Rightarrow v = \frac{3u_1}{4}.$$

Отсюда следует, что скорость первого груза $u_1 = 4v/3$, и она, действительно, направлена вниз. Скорость второго груза, соответственно, равна $u_2 = u_1/2 = 2v/3$ и направлена вверх.

Пример 4. Найдите связь между скоростями грузов в системе, изображённой на рис. 9.

Решение: Пусть скорости всех грузов v_1, v_2 и v_3, для определённости, направлены вниз (см. рис. 10). Если в реальности это окажется не так, мы просто получим отрицательное значение. На остальных вертикальных участках нитей снова отметим точки и найдём их скорость. Скорость точки №6 направлена вверх и равна $v_6 = v_1$. Из кинематической связи для самого нижнего большого блока получим, что

$$v_3 = \frac{v_4 + v_2}{2} \Rightarrow v_4 = 2v_3 - v_2.$$

Запишем теперь аналогичные условия для малых блоков в центре ри-

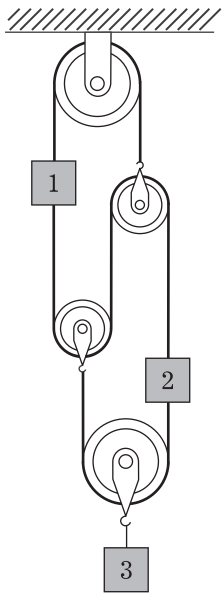

Рис. 9

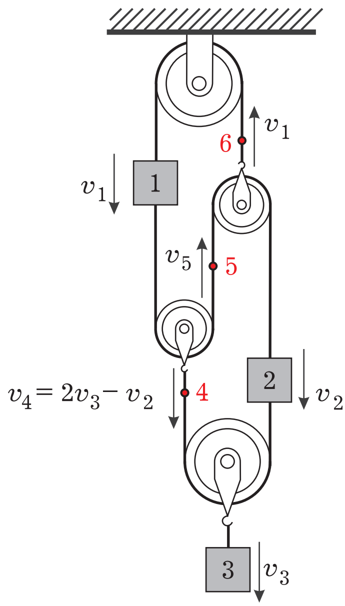

Рис. 10

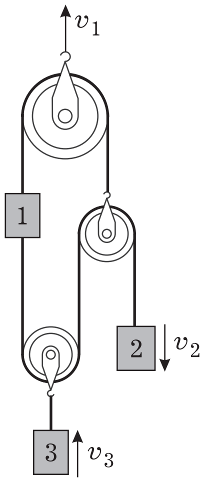

Рис. 11

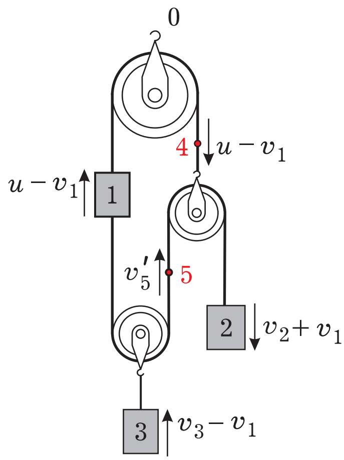

Рис. 12

сунка (скорость точки №5, для определённости, направлена вверх):

$$2v_3 - v_2 = \frac{v_1 - v_5}{2}, \quad v_1 = \frac{v_5 - v_2}{2}.$$

Складывая эти уравнения и исключая из них v_5, получим

$$2v_3 - v_2 + v_1 = \frac{v_1 - v_2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v_3 = \frac{v_2 - v_1}{4}.$$

Заметим, что в отличие от предыдущего примера, здесь скорости грузов не могут быть выражены через какую-то одну!

5. В следующих примерах рассматриваемый нами метод проще применить после перехода в более удобную систему отсчёта.

Пример 5. Найдите скорость u первого груза в системе, изображённой на рис. 11.

Решение: Пусть скорость первого груза u направлена вверх. Перейдём в систему отсчёта верхнего блока. В новой системе отсчёта скорость первого груза будет равна $u - v_1$ (если считать, что она тоже направлена вверх), скорость второго $v_2' = v_2 + v_1$, третьего – $v_3' = v_3 - v_1$ (см. рис. 12).

Скорость точки №4 в этом случае равна $u - v_1$ и направлена вниз. Обозначим скорость точки №5 как v_5' и запишем кинематические связи для нижних блоков:

$$v_3 - v_1 = \frac{(u - v_1) + v_5'}{2},$$

$$u - v_1 = \frac{v_2 + v_1 - v_5'}{2}.$$

Складывая полученные равенства, получим, что

$$u + v_3 - 2v_1 = \frac{u + v_2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = v_2 + 4v_1 - 2v_3.$$

Пример 6. Определите скорость w груза в системе, изображённой на рис. 13.

Решение: Перейдём в систему отсчёта, движущуюся вверх со скоростью груза w. В новой системе отсчёта скорости точек №1 и №6 будут равны $u_1' = u_1 - w$ и $u_4' = u_4 - w$ (считаем, что они тоже направлены вверх), а скорости верхних блоков, соответственно, $u_2' = u_2 - w$ и $u_3' = u_3 - w$ (рис. 14). Используя кинематические связи между скоростями участков нити и блоков, получим, что скорость точки №2 равна u_1', а скорость точки №5 равна u_4'.

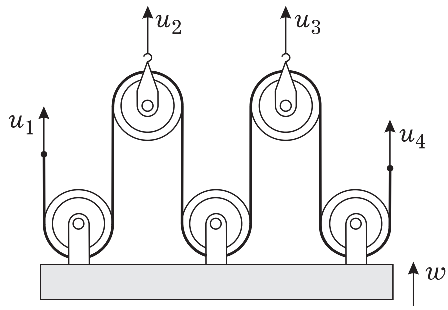

Рис. 13

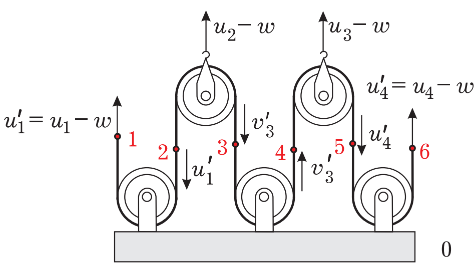

Рис. 14

Обозначим скорость точки №3 как v_3' и запишем кинематические связи для двух верхних блоков, учитывая, что скорость точки №4 также равна v_3':

$$u_2 - w = \frac{-u_1' - v_3'}{2},$$

$$u_3 - w = \frac{-u_4' + v_3'}{2}.$$

Складывая полученные равенства, получим

$$u_2 + u_3 - 2w = -\frac{u_4' + u_1'}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u_2 + u_3 - 2w = \frac{2w - u_4 - u_1}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow w = \frac{u_1 + 2u_2 + 2u_3 + u_4}{6}.$$

Заметим, что полученная формула, как и следовало ожидать, исходя из симметрии системы, не изменяется при заменах $u_1 \leftrightarrow u_4$ и $u_2 \leftrightarrow u_3$. Если же $u_2 = u_3 = 0$, а $u_4 = w$, мы приходим к задаче, аналогичной примеру 2.

Пример 7. С какой скоростью будут двигаться тележка и доска в системе, изображённой на рис. 15? Нижний участок нити присоединён к оси колеса, на котором лежит доска. Проскальзывания между колесом и доской и между колесом и полом нет.

Решение: Пусть u – скорость доски, а w – скорость тележки (будем считать, что они направлены вправо). Колесо, катящееся по полу, можно рассматривать как подвижный блок, нижняя точка которого покоится, а верхняя движется со скоростью u. Ось колеса, соответственно, имеет скорость $u/2$. Записывая кинематическую связь для правого блока, получим:

$$v_2 = \frac{u+w}{2}.$$

Перейдём в систему отсчёта, движущуюся влево со скоростью v_1 (рис. 16). Так как в ней крайние левые (по рисунку) блоки стали неподвижными, скорость точки №1 будет направлена влево и равна $u/2 + v_1$, а скорость точки №2, соответственно, $w + v_1$. Запишем кинематическую связь для подвижного левого блока, учитывая, разумеется, выбранные направления скоростей:

$$u + v_1 = \frac{-(u/2 + v_1) - (w + v_1)}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{5u}{2} + 4v_1 = -w.$$

Решая получившиеся уравнения, найдём скорости u и w:

$$v_2 = \frac{1}{2}\left(u - \frac{5u}{2} - 4v_1\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow u = -\frac{4}{3}(v_2 + 2v_1),$$

$$w = 2v_2 - u = \frac{2}{3}(5v_2 + 4v_1).$$

Знак «минус» в выражении для u означает, что скорость доски направлена не направо, как мы предположили, а налево.

6. Итак, нами был рассмотрен способ сравнительно быстрого получения кинематических соотношений в задачах с подвижными блоками.

В заключение необходимо напомнить Читателю, что, во-первых, предложенный здесь метод является пусть и мощным, но не абсолютным инструментом, «работающим», когда все грузы и блоки в системе движутся вдоль одной и той же прямой (многочисленные примеры подобных систем можно найти, например, в

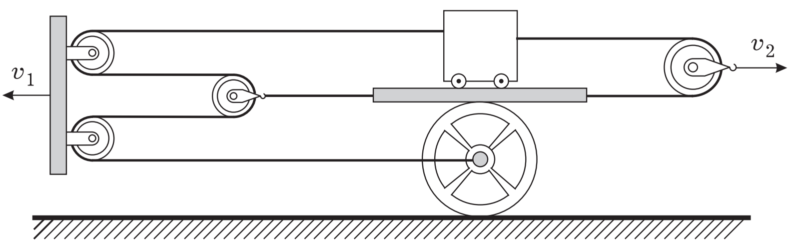

Рис. 15

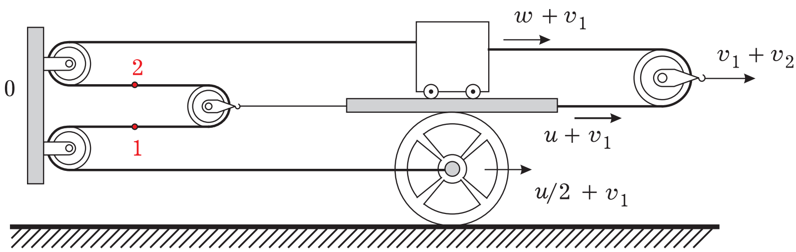

Рис. 16

[2–4]). Лишь разумное и умелое сочетание разных подходов будет приносить успех в решении даже самых сложных задач. Во-вторых, не стоит использовать на олимпиадах формулы (1)–(4) без вывода. Получение нужных соотношений не отнимет у Вас много времени (см. пункт 2 настоящей статьи), но, при этом, избавит от возможных проблем.

Список литературы

1. Черноуцан А.И., Физика. Задачи с ответами и решениями. – М.: КДУ, 2015. – 352 с. (задача 36).
2. Сборник задач по физике: Основы механики (7 класс)/Под. ред. Замятнина М.Ю.
3. Сборник задач по физике: Механика. Кинематика (9 класс, том 1)/Под. ред. Замятнина М.Ю.
4. https://sites.google.com/site/fizikaschool/ (подборки заданий под ред. Александрова Д.А.).

НОВОСТИ

Найдены новые доказательства жизни в океане спутника Сатурна

Ученые нашли новые доказательства обитаемости океана Энцелада, шестого по размеру спутника Сатурна.

Научный сотрудник Юго-Западного НИИ в США Кристофер Глейн определил, что фосфор в форме ортофосфата может в изобилии содержаться в подповерхностном океане Энцелада. Содовый или щелочной океан геохимически взаимодействует с каменным ядром спутника. Это взаимодействие способствует растворению фосфатных минералов, делая ортофосфат доступным для возможных обитателей океана.

Фосфор в форме фосфатов необходим функционирования живых организмов на Земле. «Энцелад — одна из главных целей в поисках жизни в Солнечной системе. С тех пор, как космический аппарат «Кассини» посетил систему Сатурна, мы неоднократно поражались открытиям, ставшими возможным благодаря собранным данным», — отметил ученый.

По его словам, несмотря на то, что фосфор на Энцеладе еще предстоит «идентифицировать» напрямую, его наличие в океане под ледяной коркой планеты полностью доказано.

Энцелад — шестой по размеру спутник Сатурна и четырнадцатый по удаленности от него среди 82 известных его спутников. Энцелад отражает больше солнечного света, чем какое-либо другое тело Солнечной системы. Рельеф поверхности небольшого спутника очень разнообразен: там есть и старые сильно кратерированные области, и молодые участки, возраст некоторых не превышает 100 млн лет.

Phys.org