НЕМНОГО О ПОТЕНЦИАЛЕ

А. Б. Рыбаков, МБОУ «Гимназия № 124», г. Санкт-Петербург

Из всех величин, вводимых в школьном курсе, именно потенциал определяется самым сложным образом, по сути дела, интегралом. Ситуация осложняется тем обстоятельством, что учитель-то при изложении этой темы должен избегать всякого упоминания об определённых интегралах.

Цель настоящего конспекта — в самом компактном виде представить *все* утверждения данной темы. То есть всё, что *необходимо и достаточно* для решения любых задач на эту тему. Мы не приводим доказательств, ограничиваясь лишь напоминаниями и комментариями. Доказательства же можно найти в учебниках.

КОНСПЕКТ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОТЕНЦИАЛА

I **Теорема.** В поле точечного заряда q_0 работа сил поля при перемещении заряда q из одной точки в другую не зависит от пути (а зависит только от начальной и конечной точек этого пути).

II **Следствие из теоремы I.** Указанным свойством обладает поле любого распределения зарядов.

III **Теорема.** Утверждение, что работа поля не зависит от пути, эквивалентно утверждению, что работа по любому замкнутому пути равна нулю.

IV **Следствие из теоремы III.** Силовая линия не может быть замкнутой.

V **Определение.** Поля, обладающие указанными выше свойствами, называется **потенциальными.** Так же называются и силы, действующие в таких полях. (Иногда используется термин **консервативные.**)

VI **Определение.** Разностью потенциальных энергий заряда q в точках 1 и 2 поля называется работа, которую совершат силы поля при переносе этого заряда по пути $2 \to 1$, т. е.

$$\Delta W = W_2 - W_1 = A_{21} \text{ или } W_2 - W_1 = -A_{21}.$$

VII **Определение.** Потенциал φ — это потенциальная энергия в расчёте на единицу заряда:

$$\varphi = \frac{W}{q},$$

т. е. $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1 = \frac{A_{21}}{q}$ или $\varphi_2 - \varphi_1 = -\frac{A_{21}}{q}$,

откуда для единицы измерения потенциала имеем $1\,\text{В} = \frac{1\,\text{Дж}}{1\,\text{Кл}}$.

Физический смысл имеет только ΔW и соответственно $\Delta\varphi$.

СВОЙСТВА ПОТЕНЦИАЛА

VIII **Теорема.** Принцип суперпозиции для потенциалов. В любой точке потенциал поля какой-то системы n зарядов равен сумме потенциалов полей отдельных зарядов: $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \ldots + \varphi_n$.

IX **Теорема.** Весь объём металла находится под одним потенциалом.

X **Теорема.** Связь между напряжённостью и потенциалом. В любой точке поля проекция вектора напряжённости на какое-то направление s равна с противоположным знаком производной потенциала по этому направлению:

$$E_s = -\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}.$$

XI **Следствие.** Силовая линия и эквипотенциаль в любой точке взаимно перпендикулярны.

ПОТЕНЦИАЛ В ЧАСТНЫХ СЛУЧАЯХ

XII **Теорема.** Потенциал поля точечного заряда q_0 на расстоянии r от него:

$$\varphi(r) = k\frac{q_0}{r}.$$

XIII Непосредственно из определения п. VII (или из теоремы п. X) следует, что в однородном поле, если направить ось x вдоль линий поля и положить $\varphi(0) = 0$, то $\varphi(x) = -E_x x$.

XIV Теперь легко написать выражение для энергии взаимодействия двух точечных зарядов q_1 и q_2 на расстоянии r_{12}:

$$U_{12} = q_1\varphi_2 = q_2\varphi_1 = k\frac{q_1 q_2}{r_{12}},$$

где φ_2 — потенциал поля заряда 2 в точке нахождения заряда 1 (и наоборот).

КОММЕНТАРИИ

К п. I. Вот идея доказательства. Любую кривую линию от точки *1* до точки *2* можно приближённо с любой степенью точности заменить на ломаную, звенья которой идут по окружностям (вокруг заряда q_0) и по радиусу. На участках первого типа поле работы не совершает. Суммарная работа на радиальных участках равна работе на радиальном пути от расстояния r_1 до r_2, т. е. одинакова для различных путей.

Эта теорема справедлива для любого центрального поля. В частности, для гравитационного поля материальной точки.

К п. II. Для доказательства можно просто сослаться на принцип суперпозиции электрических полей и известную теорему механики: работа равнодействующей силы равна сумме работ составляющих сил.

К п. III. Доказывается очевидными логическими рассуждениями.

К п. IV. Доказательство сформулированного утверждения очевидно. Интересно, что к этому вопросу можно подойти и с другой стороны. Если бы силовая линия была замкнутой кривой, то мы могли бы переносить заряд по такой кривой и черпать энергию из поля! Так что потенциальность электростатического (и гравитационного) поля связана с сохранением энергии.

К п. V. Только в потенциальном поле можно ввести потенциальную энергию и потенциал. Из полей, изучаемых в школьном курсе, электростатическое и гравитационное поля являются потенциальными. Магнитное поле непотенциально. Но из этого не следует, что в магнитном поле работа зависит от пути. В магнитном поле работа поля при перемещении заряда по любому пути равна нулю, потому что сила Лоренца перпендикулярна к скорости частицы.

К п. VI. По сути, с этим определением ученики уже знакомы. Ведь именно так вводилась потенциальная энергия в механике. Обратите внимание на порядок индексов!

К п. VII. Можно положить, что в какой-то точке потенциальная энергия заряда $W=0$ (и, соответственно, $\varphi=0$), тогда мы можем говорить просто о потенциальной энергии и потенциале (относительно этой точки). В теоретических расчётах для любого распределения зарядов в ограниченной области пространства обычно полагают $\varphi_\infty=0$. В электротехнике принимают, что $\varphi=0$ на земле.

К п. VIII. Об обозначениях: φ_k — это потенциал поля, созданного k-м зарядом в выделенной точке. При этом, конечно, предполагается, что выбор нуля потенциала для всех полей произведён одинаково. Итак, принцип суперпозиции может быть записан не только через напряжённости, но и через потенциалы, а складывать скалярные величины намного проще и удобнее, чем векторные!

О доказательстве этой теоремы — *см. комментарий к п. II*.

К п. IX. Две любые точки в куске металла можно соединить кривой, целиком лежащей в металле. Поскольку в металле напряжённость поля $E=0$, то и работа по такому пути равна 0.

К п. X. Работу поля при малом перемещении Δs можно записать через напряжённость поля, а можно — через изменение потенциала. Приравнивая два этих выражения, и получаем указанное соотношение между этими величинами. Это соотношение, в частности, объясняет, почему единицу измерения напряжённости в СИ можно записывать в виде $\frac{\text{В}}{\text{м}}$.

Увы, термин «производная» в 10-м классе использовать нельзя. Приходится говорить, что указанная формула выполняется тем точнее, чем меньше Δs.

В ЕГЭ обычно используют лишь частный случай этой формулы — для однородного поля (*см. п. XV*).

Умножив обе части равенства на заряд q, приходим к соотношению между потенциальной энергией и силой:

$$F_s=-\frac{\Delta U}{\Delta s}.$$

Это соотношение, конечно, справедливо для любых потенциальных сил. Проверьте её в самых разных случаях: для силы упругости, для камня над землей, для притяжения двух небесных тел.

К п. XI. При перемещении по эквипотенциали $\Delta\varphi=0$, т. е. $E_s=0$, этим и доказывается сформулированное утверждение.

К п. XII. После изучения в курсе математики темы «Определённый интеграл» эта формула доказывается легко. Вычислим работу поля по радиальному пути от ∞ до расстояния r от заряда q_0:

$$\varphi(r)=-\frac{A_{\infty r}}{q}=kq_0\int_r^\infty\frac{dr}{r^2}=kq_0\left(-\frac{1}{r}\right)\Bigg|_r^\infty=kq_0\frac{1}{r}.$$

Но в 10-м классе приходится принимать эту формулу без доказательства.

В теме «Напряжённость поля» доказывается (или принимается без доказательств), что если заряд Q равномерно распределён по шару или сфере радиуса R, то для $r>R$ мы имеем поле точечного заряда Q. Поэтому в частности $\varphi(r)=k\frac{Q}{r}$ (r отсчитывается от центра шара или сферы).

К п. XIII. Обратите внимание: потенциал падает в том направлении, куда направлен вектор напряжённости. Можно сказать, что положительный заряд «скатывается с потенциальной горки» так же, как шарик скатывается с обычной горки.

В кодификаторе ЕГЭ эта формула представлена в ещё более упрощенном виде: $U=Ed$.

К п. XIV. Приведенная формула легко обобщается на случай системы n точечных зарядов. Для потенциальной энергии этой системы имеем:

$$U=\frac{k}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{m=1}^{n}\frac{q_iq_m}{r_{im}},$$

где r_{im} — расстояние между i-м и m-м зарядами.

Все наши результаты с заменой $q\to m$ и $k\to G$ справедливы и для гравитационного поля (G — гравитационная постоянная). В частности, теперь мы знаем энергию гравитационного взаимодействия двух материальных точек или двух небесных тел сферической формы:

$$U_{12}=-G\frac{m_1m_2}{r_{12}}.$$