Из записной книжки учителя

А.РЫБАКОВ

За годы преподавания у меня, как возможно и у многих моих коллег, накопилось множество заметок о разных задачах, о тонких местах курса, об учебной литературе, об интересных исторических фактах, о своих и чужих ошибках. Небольшая часть этих весьма разнородных заметок предлагается вниманию читателей.

В некоторых из них (например, в тех, где рассказывается об интересных задачах) я просто хотел поделиться с коллегами тем удовольствием, которое сам испытал. В других же (где рассказывается об ошибках в учебной литературе) моя роль похожа на роль дворника, который посыпает песком скользкие места, чтобы никто там не поскользнулся. Впрочем, и здесь испытываешь определенное удовлетворение, оттого что не дал провести себя за нос.

Геометрия или физика?

На эту удивительную задачу я наткнулся в книге известного американского популяризатора математики Мартина Гарднера. Мне кажется, что в каком-нибудь сборнике нестандартных физических задач она была бы на своем месте. Вот ее условие:

В шаре через центр просверлен канал длиной L. Каков объем оставшейся части шара?

Задача представляется чисто геометрической и весьма непростой. Возникают даже мысли о сложных интегралах, а также о том, что ситуация не полностью определена – ведь радиус шара не дан.

Оставим геометрический подход и попробуем зайти с другой стороны. Будем исходить из соображений размерности. Искомый объем V должен выражаться только через L, ведь больше ничего не дано. Сразу ясно, что невозможна никакая другая зависимость объема от линейного размера, кроме как

$$V = CL^3,$$

где C – какая-то безразмерная константа. Найти ее не трудно, надо только подобрать какой-нибудь подходящий частный случай.

В этой задаче можно придумать всего два частных случая. Прежде всего посмотрим, что мы будем иметь при увеличении радиуса канала до радиуса шара. При этом длина канала L стремится к 0, и формула дает $V \to 0$ (как и должно быть) при любом значении C. Так что определить C таким образом нам не удалось. Теперь будем мысленно устремлять радиус канала к 0, при этом длина канала L будет стремиться к диаметру шара, а объем оставшейся части шара – к объему всего шара. Значит, в этом пределе наша формула должна давать нам объем шара диаметром L. Таким образом, получаем

$$V = \frac{\pi}{6}L^3.$$

Казалось бы, это чисто математическая задача, но решена она физическими методами: с использованием соображений размерности и анализом частного случая! Заметим, что ситуация действительно не полностью определена, но для нахождения искомого объема это обстоятельство оказывается несущественным.

Однако, задача очень интересна и в другом отношении. Она показывает нам разницу между «настоящими» исследовательскими и учебными «тренировочными» задачами. Исследователь заранее не знает, от каких параметров может зависеть ответ возникшей перед ним задачи. Автор же задачи, помещенной в задачнике, гарантирует нам, что она решается, что ответ будет зависеть только от параметров, данных в условии.

Именно эта ситуация имеет место с рассмотренной здесь задачей. Мы уверены в полученном нами результате только в той степени, в какой мы верим утверждению автора задачи, что ни от каких других параметров ответ не зависит.

Кипяток или пар?

Пожалуй, нет ни одного школьного задачника, где не было бы такой качественной задачи:

Что сильнее обжигает – кипяток или пар?

Лаконичные авторы просто пишут в ответах: «пар». Более словоохотливые объясняют читателю, что при контакте пара с рукой будет выделяться очень большая энергия конденсации. Интересно, что никому из авторов, воспроизводящих эту задачу, не приходит в голову пойти на кухню и проверить свои «теоретические построения». Наверное, боятся обжечься. Я же в далекие уже школьные годы, впервые столкнувшись с этой задачей, пошел на кухню, вскипятил чайник и стал «экспериментировать». Так вот, я совершенно спокойно проводил рукой над носиком кипящего чайника, из которого била струя «пара», но не стал бы делать это со струей кипятка из того же чайника!

В чем же дело? Давайте разбираться.

Проводить сравнение двух каких-то явлений, двух каких-то опытов можно только тогда, когда четко указано, при каких конкретных условиях производится сравнение и что в этих опытах одинаково, а что различно. Нам предлагают сравнить результаты двух «опытов», в которых рука «экспериментатора» приходила в контакт с кипятком и с паром. Но что было одинаково в этих двух опытах? Об этом ничего не сказано. Авторы, возможно, неявно подразумевают, что рука в этих двух «опытах» пришла в соприкосновение с одинаковыми массами пара и воды. Но каким же образом это можно устроить? Ведь плотность пара в тысячу раз меньше плотности воды. Можно легко вылить на ладонь 200 г воды из стакана. Но как же вы приведете ладонь в соприкосновение с 200 г пара сразу? Я не знаю. Так как же можно сравнивать?

Пойдем дальше. Можно ли называть белую струю, бьющую из носика кипящего чайника, паром? Водяной пар, напомню, конечно же, практически невидим. В струе же, бьющей из носика чайника, заметная часть пара уже сконденсировалась при контакте с более холодным воздухом – именно этот белый туман (состоящий из мельчайших капелек воды) мы и наблюдаем, хотя называем его в быту паром. Как же обеспечить контакт руки с чистым паром? Не знаю. Надо спросить у авторов этой задачи. Наверное, надо сунуть руку в паровой котел. Но и в этом случае, повторю, не удастся обеспечить равенства масс кипятка и пара, непосредственно контактирующих с рукой.

Что же остается от этой «замечательной», такой понятной всем задачки?..

Где приложена сила Архимеда?

Сила Архимеда – это равнодействующая всех сил давления, действующих на все элементы поверхности тела, погруженного в жидкость (или газ). Но где она приложена? В учебной литературе школьного уровня доводилось читать, что она приложена в центре тяжести вытесненного объема. Но в общем случае это заведомо не так.

Для тела какой-нибудь «правильной» формы провести качественные рассуждения совсем не сложно. Например, что можно сказать о точке приложения силы Архимеда для расположенных в жидкости правильной треугольной призмы и полусферы (или половины цилиндра)?

На рисунке 1 изображены силы давления на одинаковые малые элементы поверхности правильной треугольной призмы (черные стрелки). При этом учтено,

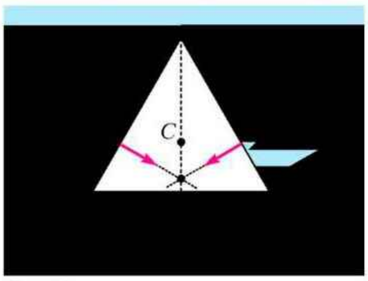

Рис. 1

что силы давления перпендикулярны поверхности и возрастают с глубиной (конечно, последний эффект на рисунке преувеличен). Поэтому равнодействующая сил давления, действующих на боковые грани призмы (красные стрелки), приложена не в серединах этих граней, а ниже. Соответственно, и пересекаться три таких равнодействующих будут не в центре тяжести C, а ниже его.

На рисунке 2 аналогичное построение проведено для полусферы (или полуцилиндра). Точка O – центр той сферы, от которой отделена половина. Центр тяжести

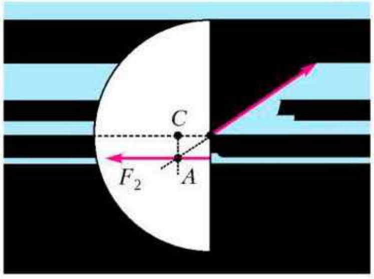

Рис. 2

этого тела – точка C – лежит где-то на оси симметрии, точное его положение нас сейчас не интересует.

Поскольку все элементарные силы давления, действующие на малые элементы искривленной поверхности, направлены по радиусу, то их равнодействующая $\vec{F}_1$ будет приложена в точке O и направлена под углом вверх. Равнодействующая же $\vec{F}_2$ всех сил давления, действующих на плоскую сторону фигуры, лежит (как уже объяснено) ниже оси симметрии полусферы. Так что силы $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ не могут пересечься в точке C. Они пересекаются ниже оси симметрии тела (в точке A).

В фундаментальных курсах механики жидкости и газа доказывается теорема о том, что точка приложения силы Архимеда всегда лежит на одной вертикали с центром тяжести вытесненного телом объемом жидкости. Именно поэтому мы на последнем рисунке уверенно расположили точку A на одной вертикали с центром тяжести C. (Заметим, что горизонтальные составляющие сил $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$, конечно, равны.)

«Спутник по небу летит...»

Это – строчка из давних стихов известного ленинградского поэта Михаила Дудина. Но я сейчас не о стихах. В воспоминаниях кого-то из деятелей космонавтики я прочел, что в течение многих лет на пресс-конференциях журналисты задавали один и тот же вопрос о спутниках: «А все-таки, почему он не падает?» Со временем эти вопросы иссякли. Кажется, автор думал, что со временем журналисты что-то поняли. Увы!

Неоднократно приходилось слышать в новостях: «Подчиняясь закону всемирного тяготения, станция каждые сутки опускается на двести метров». А ведь все эти люди – авторы новостей, редакторы, дикторы – кончили школу. И никто из них не усвоил элементарный второй закон Ньютона. Даже не формулу, а простую идею, стоящую за формулой. А идея эта состоит в том, что сила непосредственно определяет не скорость тела, а ускорение. «Подчиняясь закону всемирного тяготения», спутник Земли Луна миллиарды лет обращается вокруг Земли и не опускается. Спутник же опускается из-за торможения о воздух (кстати сказать, состав воздуха на больших высотах совсем не тот, что вблизи поверхности Земли). Надеюсь, читатель помнит, что при таком торможении спутник… ускоряется!

Впрочем, ошибки бывают и у профессионалов. Вот передо мной замечательный пятитомный университетский учебник физики. В качестве иллюстрации к одной из задач там помещен рисунок, на котором изображена орбита искусственного спутника Земли (рис.3). Что

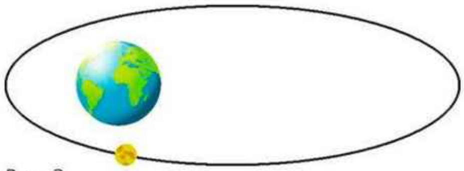

Рис. 3

подумает читатель о таком рисунке? А ведь его дефект должен бросаться в глаза даже десятикласснику. Ближайшая к Земле точка орбиты спутника (перигей) должна лежать на большой оси эллипса, на рисунке же мы имеем что-то несусветное. Правильный же рисунок должен выглядеть примерно так, как показано на рисунке 4.

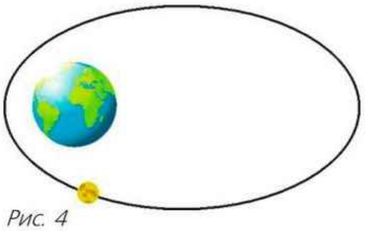

Рис. 4

Даже из этого простого примера хочется вывести некую «мораль». Никогда нельзя терять бдительность! Ошибки (иногда совсем элементарные) могут встретиться в тексте любого автора.

Траектория альфа-частицы – заколдованное место

Здесь речь пойдет о траектории движения заряженной частицы в поле другого (неподвижного) заряда. Например, движение альфа-частицы в поле ядра (опыты Резерфорда). Какой-то злой рок преследует авторов, пишущих на эту тему. О, сколько я видел книг, где авторы рисуют траекторию альфа-частицы примерно так, как показано на рисунке 5. Так она нарисована и в моем любимом «Курсе общей физике», и в замечательном «Сборнике качественных задач», и в некоторых других книгах.

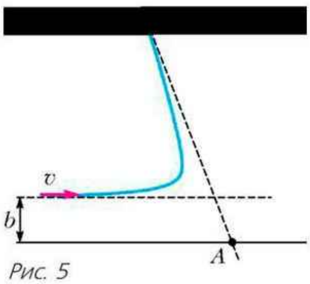

Рис. 5

Самые разные соображения могли бы насторожить авторов такого рисунка. Можно было бы рассуждать чисто формально и задуматься о том, как должна проходить ось симметрии гиперболы (а траектория альфа-частицы именно гипербола). Можно было бы подумать об обратимости механического движения. Но ничто их не насторожило.

Давайте разбираться подробно.

Итак, речь идет о движении заряженной частицы в поле неподвижного силового центра – другого заряда (иногда говорят о рассеянии, иногда – о столкновении). Можно сказать, что на бесконечности частица не чувствует поле силового центра и движется прямолинейно и равномерно со скоростью v (для приверженцев строгости скажем, что упомянутая прямая – это асимптота гиперболы). Расстояние от силового центра – точки A – до этой прямой называется прицельным расстоянием b (иногда – параметром удара). Вот только от этих двух параметров v и b и зависит результат столкновения.

Есть важнейшая величина, характеризующая движение тела, которая в базовом школьном курсе механики и не упоминается. Это момент импульса $\vec{L}$. Момент импульса нашей частицы относительно точки A по определению равен

$$\vec{L} = \vec{p} \times \vec{r} ,$$

где $\vec{p}$ – импульс частицы, а $\vec{r}$ – ее радиус-вектор (т.е. вектор, проведенный из точки A в движущуюся частицу). Ясно, что момент импульса частицы на бесконечности по величине равен mvb. Одно из фундаментальных уравнений механики точки имеет вид

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} ,$$

т.е. скорость изменения момента импульса равна моменту $\vec{M}$ сил, действующих на точку. Сразу ясно, что центральная сила не меняет момента импульса частицы. Так что, в частности, момент импульса частицы до взаимодействия и после него должен быть один и тот же. Но при упругом взаимодействии величина скорости не меняется, следовательно, не изменяется и прицельное расстояние. Так что траектория альфа-частицы должна иметь примерно такой вид, как показано на рисунке 6.

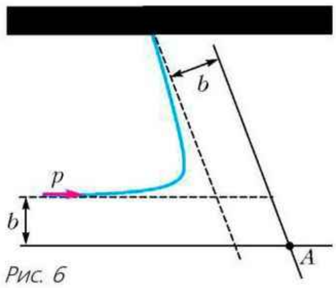

Рис. 6

И снова скажу: сколь бы авторитетными не казались вам авторы какого-то текста, к любому тексту надо относиться как к материалу для критического анализа – ошибки бывают у всех авторов.

Можно ли раскладывать кинетическую энергию на составляющие?

Я был свидетелем того, как на научном семинаре молодому сотруднику, недавнему студенту, показалось, что он обнаружил ошибку в рассуждении известного специалиста. Молодой человек встал и сказал: «Вот Вы, Иван Иванович, говорили “параллельная кинетическая энергия”, “перпендикулярная кинетическая энергия”, но кинетическая энергия не вектор, а скаляр. А скаляр нельзя раскладывать на составляющие!» И, победно оглядев собравшихся, молодой человек сел на место.

На первый взгляд, в словах молодого человека все правильно – кинетическая энергия действительно скалярная величина. Но не будем торопиться.

Пусть частица движется со скоростью v. Выделим какое-то направление в пространстве. Разложим вектор скорости частицы на два: вдоль этого направления и перпендикулярно ему:

$$\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}.$$

Умножим это равенство скалярно на себя же и получим

$$v^2 = v_{\parallel}^2 + v_{\perp}^2.$$

А это, конечно, не что иное, как теорема Пифагора. Введем обозначение для кинетической энергии частицы: $K = mv^2/2$, тогда последнее равенство можно записать в виде

$$K = K_{\perp} + K_{\parallel}.$$

Можно сказать, что мы «разложили кинетическую энергию на составляющие», но пока это чисто формальные рассуждения. А имеет ли это равенство какой-нибудь физический смысл?

И в школьных задачах, и в научных проблемах не редки такие ситуации, когда силы, действующие на частицу, всюду направлены одинаково. Тогда и потенциальная энергия частиц меняется лишь по тому же направлению. Такая сила будет изменять только составляющую скорости вдоль этого направления, т.е. $\vec{v}_{\parallel}$. Во всех подобных случаях полезно использовать разложение кинетической энергии на составляющие, ведь в этих случаях $K_{\perp} = \text{const}$, а меняется только $K_{\parallel}$.

Очень часто на границе раздела двух сред мы сталкиваемся с такой ситуацией, когда потенциальные энергии какой-то частицы в этих двух средах существенно различаются. Тогда мы говорим о наличии потенциального барьера на границе раздела (или на контакте) этих сред. Именно такая ситуация имеет место для молекул на границе жидкость–пар, для электронов на границе металл–вакуум или металл–плазма, в месте контакта двух полупроводников (обычно такие барьеры имеют очень малую толщину). Во всех таких случаях при анализе движения частиц через границу раздела полезно иметь в виду, что меняется только кинетическая энергия вдоль нормали к границе.

Напрашивается следующая задача для закрепления этого материала:

В двух соседних областях электрон имеет потенциальные энергии U_1 и U_2 ($U_1 > U_2$). Электрон в области I подходит к границе раздела этих областей со скоростью v_1 под углом α к нормали (рис.7). Как направлена его скорость v_2 в области II?

(Ответ: $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{v_1 \sin\alpha}{\sqrt{v_1^2\cos^2\alpha + \dfrac{2\Delta U}{m}}}$, где $\Delta U = U_1 - U_2$.)

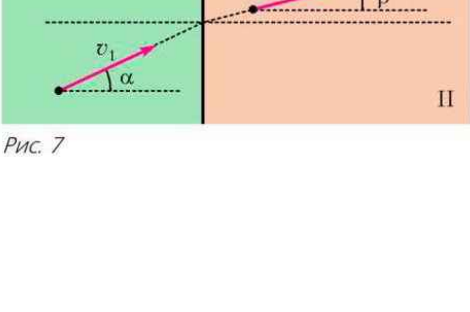

Рис. 7

Скотный двор, Антоша Чехонте и распад ядер

(Приключения одного сюжета)

В далекие уже времена детства в какой-то книжке по занимательной математике мое внимание привлекла такая задачка:

Петя только недавно научился считать и теперь считает все вокруг. Увидев во дворе кроликов и кур, Петя пересчитал отдельно головы всех животных и отдельно все ноги. Голов оказалось 40, а ног – 120. Сколько же там кроликов и сколько кур?

К сожалению, не помню, удалось ли мне тогда получить удовольствие от самостоятельного решения задачи или я в нетерпении заглянул в ответ, но задача запомнилась.

А в юности я прочитал рассказ Чехова «Репетитор». Этот рассказ впервые был опубликован в 1883 году за подписью Антоши Чехонте. Там «учитель», гимназист VII класса Егор Зиберов, дает своему ученику Пете такую задачу:

Купец купил 138 аршин черного и синего сукна за 540 руб. Спрашивается, сколько аршин купил он того и другого, если синее стоило 5 руб. за аршин, а черное – 3 руб.?

Это, конечно, по сути дела, та же самая задача, только в другом оформлении и с другими числами. Сам «учитель» решить задачу не может и бормочет о том, что «ее с иксами решить можно». А присутствующий на уроке отец Пети, «отставной губернский секретарь», щелкает на счетах и показывает ответ.

Когда я рассказываю об этом ученикам, мне приходится отвлекаться от основного сюжета и объяснять, что такое счеты (рис.8). Я в детстве очень любил этот «вычислительный прибор», где костяшки двигались по проволочкам, но умножать и делить на нем не умел (а ведь в старину на нем производили даже действия с дробями).

Рис. 8

Наверное, стоит сказать и о том, как отец Пети, вероятно, решал эту задачу. Он мог рассуждать так. Если бы купец купил 138 аршин черного сукна, то он выложил бы за него $138\ \text{руб} \cdot 3 = 414\ \text{руб}$. Это меньше, чем заплачено купцом за всю покупку, на 126 руб. При замене одного аршина черного сукна на аршин синего общая стоимость покупки увеличится на 2 руб. Значит, такую замену надо мысленно произвести $126\ \text{руб} / 2\ \text{руб} = 63$ раза. Итак, купец купил 63 аршина синего сукна и $138 - 63 = 75$ аршин черного.

Но почему я решил вспомнить простые арифметические задачи? Потому что как-то листал задачники, готовясь к уроку по теме «Радиоактивный распад», и наткнулся на такую задачу:

В результате нескольких α- и β-распадов радиоактивный атом ${}^{232}_{90}\mathrm{Th}$ превратился в атом ${}^{212}_{83}\mathrm{Bi}$. Сколько произошло α-распадов и сколько β-распадов?

Наши ученики, конечно, сразу начинают писать систему уравнений. А как бы решал эту задачу «отставной губернский секретарь», если бы знал ядерную физику?

Известно, что β-распад не меняет числа нуклонов в ядре, каждый же α-распад уменьшает общее число нуклонов на 4, а число протонов – на два. Значит, должно было произойти $(232-212)/4=5$ α-распадов. Тогда в образовавшемся ядре было бы $90-5\cdot2=80$ протонов. При каждом β-распаде вместо нейтрона появляется протон. Поэтому, чтобы исправить ситуацию и довести число протонов до 83, необходимо добавить 3 β-распада.

Так сюжет с курами и кроликами нашел свое физическое воплощение.

Теплоемкость газа

О, сколь интересны и разнообразны бывают ошибки!

Вот задача из одного пособия для учителей:

Чтобы нагреть 2 кг газа с молярной массой $20\cdot10^{-3}$ кг/моль при постоянном давлении на 50 К, потребовалось сообщить ему количество теплоты $Q_p=50$ кДж. Определите количество теплоты Q_V, которое потребуется для такого же нагревания при постоянном объеме.

Никаких неожиданностей такое условие не обещает – вроде бы, стандартная задача. Рекомендую читателям решить ее. А мы приведем идею авторского решения.

Запишем выражения для количеств теплоты, подведенных к газу в изобарическом и изохорическом процессах:

$$Q_p=\frac{m}{M}C_p\Delta T,\quad Q_V=\frac{m}{M}C_V\Delta T.$$

Здесь все обозначения стандартные: C_p и C_V – это молярные теплоемкости газа в соответствующих процессах, m – масса газа, M – его молярная масса, ΔT – изменение температуры. Возьмем теперь уравнение Майера $C_p-C_V=R$ и умножим его почленно на $\frac{m}{M}\Delta T$. Получим

$$Q_V=Q_p-\frac{m}{M}R\Delta T=$$

$$=50\cdot10^3\text{ Дж}-10^2\text{ моль}\cdot8{,}3\text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})\cdot50\text{ К}=$$

$$=8{,}5\cdot10^3\text{ Дж}=8{,}5\text{ кДж}.$$

Задача решена. Вроде бы все правильно. Однако, найдите ошибку!

Задумаемся над тем, какой это может быть газ. Подсчитаем C_p для этого газа:

$$C_p=\frac{Q_p}{\frac{m}{M}\Delta T}=\frac{50\cdot10^3\text{ Дж}}{10^2\text{ моль}\cdot50\text{ К}}=$$

$$=10\text{ Дж}/(\text{моль}\cdot\text{К})=1{,}2R.$$

Надо ли объяснять, что такого газа в природе не существует? Хорошо известно, что наименьшее значение C_p у одноатомного газа и равно оно $5R/2=2{,}5R$.

Получается, что задача посвящена такому объекту, который в принципе существовать не может!

НАША ОБЛОЖКА

Парение на водных струях

(Начало см. на 4-й странице обложки)

...После просмотра в интернете прекрасного видео (http://youtu.be/Cd6C1vIyQ3w) мне захотелось призвать на помощь физику для объяснения волшебства парения на водных струях. Присоединяйтесь!

На фотографии слева крупным планом представлено крепление приставки FLYBOARD к ботинкам. Видно, что вода поступает снизу по красному шлангу, а потом ее поток раздваивается – влево и вправо, меняя направление на противоположное. На этом пути часть потока уходит вверх по двум узким черным шлангам к рукам человека – это хорошо видно на фотографии справа. Изменяя направление этих «ручных» потоков, человек может изменять силу, действующую на него со стороны воды.

К.Богданов