

Александр Борисович Рыбаков

*Кандидат физико-математических наук,
учитель физики в гимназии № 144,
г. Санкт-Петербург.*



Несколько качественных задач на силу Архимеда

Очень часто у школьников представление о сложности задачи связано с громоздкостью уравнений и с их числом. С этой точки зрения предлагаемые ниже качественные задачи – совсем простые. В качественных задачах математические выкладки либо не играют вообще никакой роли, либо играют лишь вспомогательную роль.

Ученики должны не просто получить какой-то объём знаний – они должны научиться физическим рассуждениям. И надо показывать им образцы этих рассуждений на простых примерах. Представляется, что качественные задачи на тему плавания тел очень хорошо подходят для этой цели.

О плавании тел

Во всех случаях речь будет идти о телах, помещённых в жидкость (или газ).

Договоримся об обозначениях и напомним важнейшие соотношения.

$\rho_{\text{ж}}$ – плотность жидкости (в частности, $\rho_{\text{в}}$ и $\rho_{\text{рт}}$ – плотности воды и ртути), $\rho_{\text{т}}$ – плотность тела, V – объём тела, V' – объём той части тела, которая находится в жидкости (или объём вытесненной телом жидкости).

Выталкивающая сила (сила Архимеда) равна весу вытесненной телом жидкости:

$$F_A = \rho_{\text{ж}} V' g. \quad (1)$$

При плавании тела сила Архимеда уравновешивает силу тяжести,

действующую на тело:

$$\rho_{\text{т}} V g = \rho_{\text{ж}} V' g. \quad (2)$$





Откуда объём вытесненной жидкости равен

$$V' = \rho_T V / \rho_{ж}. \quad (3)$$

Для решения задач нам не требуются конкретные значения плотностей разных жидких и твёрдых веществ, потребуются лишь соотношения между ними. И хотя это, конечно, все помнят, всё-таки скажем, что в ряду дерево – вода – алюминий – медь – ртуть плотность

возрастает слева направо.

Будьте внимательны – изменение одного слова в условии полностью меняет ситуацию! Помните, дело не в том, чтобы догадаться до ответа, а в том, чтобы предложить доказательное рассуждение. Конечно, некоторые из предложенных задач хорошо известны и с давних пор включаются в задачки, но даже в этом случае – почитайте наше обсуждение.

Задачи

1) стакан с водой стоит на весах. Подошёл Петя и опустил палец в воду, не касаясь стенок. Изменились ли показания весов?

2) Петя взял две одинаковые банки и в одну из них положил деревянный шарик. Потом в обе банки налил воды вровень с краями. После этого взвесил обе банки. Какая банка оказалась тяжелее?

3) В банку с водой положили кусок льда. Как изменится уровень воды в банке, когда лёд растает?

4) Лодка плавает в бассейне. Шёл дождь, и в лодку набралась вода. Петя вычерпывает из лодки воду, стоя на бортике. Как меняется уровень воды в бассейне?

Следующие две задачи лучше обдумывать параллельно.

5) В лёгкой лодочке, плавающей в бассейне, лежит булыжник. Как изменится уровень воды в бассейне, если булыжник сбросить в воду?

6) В железной лодке, плавающей в бассейне, открылась течь, и она со временем затонула. Как при этом изменился уровень воды в бассейне?

7) В банку с водой положили кусок льда с вмёрзшей в него гирькой. Как изменится уровень воды в банке, когда лёд растает?

8) Три шара одинаковой массы – деревянный, алюминиевый и медный – брошены в сосуд с ртутью. Расположите в порядке возрастания действующие на них выталкивающие силы.

9) Три шара одинакового объёма – деревянный, алюминиевый и медный – брошены в сосуд с ртутью. Расположите в порядке возрастания действующие на них выталкивающие силы.

10) Три шара одинакового объёма – деревянный, алюминиевый и медный – брошены в сосуд с водой. Расположите в порядке возрастания действующие на них выталкивающие силы.

11) Три шара одинаковой массы – деревянный, алюминиевый и медный – брошены в сосуд с водой. Расположите в порядке возрастания действующие на них выталкивающие силы.

12) В ртути плавает медная шайба. Сверху доливают воду.



Как при этом меняется глубина погружения шайбы в ртуть? Какая часть шайбы будет в ртути, когда вода полностью покрывает шайбу?

Обсуждения

1) Иногда ученики отвечают: «Палец же не касается стенок стакана – значит, на весы никакая сила не передаётся, следовательно, показания весов не изменятся». Но это неправильно.

Можно предложить два способа рассуждений.

1-й способ. На палец со стороны воды действует выталкивающая сила. А для любого взаимодействия справедлив 3-й закон Ньютона, значит, и на стакан с водой действует такая же сила, следовательно, показания весов увеличатся.

2-й способ. При погружении пальца в воду уровень воды в стакане повысится, т. е. увеличится сила давления воды на дно стакана. А именно эта сила и передаётся на чувствительный элемент весов.

2) Давление воды на дно зависит только от высоты столба воды, т. е. одинаково в этих двух случаях. Так что банки весят одинаково.

3) Снова предложим два способа рассуждений.

13) Мыльный пузырь, надутый гелием, плавает в воздухе. Что больше – масса мыльной оболочки или масса гелия в оболочке?

Мы сделаем хитрый манёвр. Поставим эту банку на весы. Что бы ни происходило в банке, её масса, а, следовательно, и действующая на неё сила тяжести не изменится, т. е. не изменятся показания весов. Но мы уже выяснили, что сила давления воды на дно банки зависит лишь от высоты столба воды. Значит, и уровень воды в банке при таянии льда не изменился.

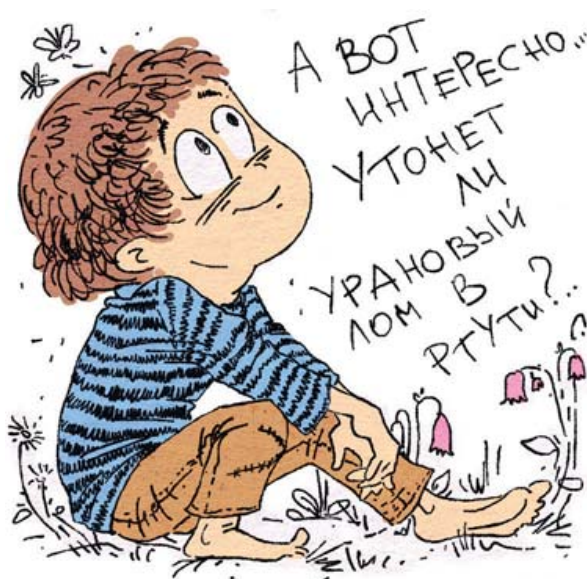
Но, если мы не боимся формул, можно рассмотреть это явление детально.

Когда кусок льда плавает, он по формуле (3) вытесняет объём воды, равный $\rho_{\text{л}}V/\rho_{\text{в}}$ ($\rho_{\text{л}}$ – плотность льда). Когда лёд растает, то образуется объём воды V_0 , который можно найти из условия сохранения массы: $\rho_{\text{в}}V_0 = \rho_{\text{л}}V_{\text{л}}$, т. е. $V_0 = \rho_{\text{л}}V_{\text{л}}/\rho_{\text{в}}$, т. е. тот же объём воды, который кусок льда вытеснял, когда плавал. И мы пришли к тому же выводу – уровень воды не изменится.

4) Всё ясно из решения предыдущей задачи. Уровень воды в бассейне не меняется, а глубина погружения лодки в воду становится всё меньше.

5) и 6) – это по сути дела одна и та же задача. Речь идёт об одном и том же – на поверхности воды тело большой плотности $\rho_{\text{т}}$ плавает или за счёт своей специальной формы (лодка), или поддерживается другим лёгким телом. В обоих случаях оно вытесняет объём воды V' – см. (3). А когда тело утонет, оно будет вытеснять воду в своём объёме V , ясно, что $V < V'$ (ведь $\rho_{\text{т}} > \rho_{\text{в}}$), и потому уровень воды в бассейне понизится.

Почему в этом случае будут неправильны рассуждения, основан-





ные на сохранении массы, которые мы использовали выше? Масса-то сохраняется, но теперь на дно бассейна давит не только столб жидкости, но и лежащее на дне тело.

7) Для нас теперь эта задача не является самостоятельной задачей – это объединение сюжетов из условий задач 3 – 5. Уровень воды понизится.

8) Совсем простая задачка. В ртути все шары будут плавать, следовательно, для любого шара сила Архимеда равна по величине силе тяжести, действующей на него, так что все силы Архимеда одинаковы по величине:

$$F_A(\text{дер}) = F_A(\text{Al}) = F_A(\text{Cu}).$$

9) В ртути все шары будут плавать, так что для любого шара сила Архимеда равна по величине силе тяжести. А сила тяжести при одинаковом объёме пропорциональна плотности, поэтому

$$F_A(\text{дер}) < F_A(\text{Al}) < F_A(\text{Cu}).$$

10) Алюминиевый и медный шары, конечно, утонули, т. е. целиком погружены в воду. Деревянный же шар плавает в воде, т. е. погружён в воду лишь частично (рис. 1). Сила Архимеда, напомним, зависит лишь от объёма части тела, погружённой в воду. Поэтому

$$F_A(\text{дер}) < F_A(\text{Al}) = F_A(\text{Cu}).$$

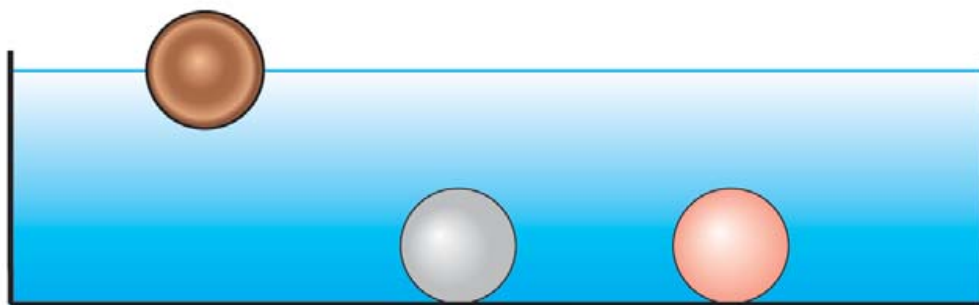


Рис. 1

11) Деревянный шар плавает на поверхности (рис. 2), для него сила Архимеда равна силе тяжести:

$$F_A = mg.$$

Металлические же шары утону-

ли, для них $F_A < mg$. И, кроме того, для этих шаров F_A пропорциональна объёму, так что

$$F_A(\text{Cu}) < F_A(\text{Al}) < F_A(\text{дер}).$$

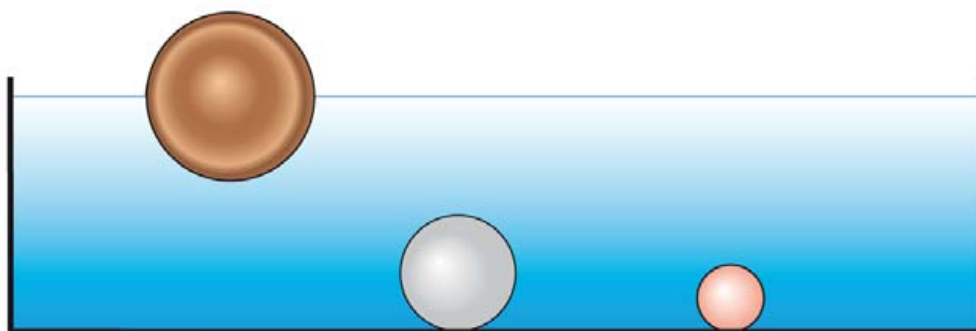


Рис. 2

12) Пока вода не накрыла шайбу сверху, роль воды сводится только к увеличению давления ртути на шайбу снизу. Так что шайба поднимается относительно уровня ртути. Так будет продол-

жаться до тех пор, пока вода не достигнет верхней грани шайбы (см. рис. 3)

Рассчитаем, какая часть шайбы при этом окажется в ртути, а какая – в воде.

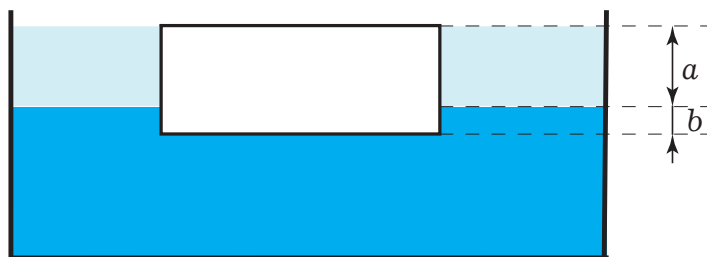


Рис. 3

Сила тяжести, действующая на шайбу, уравновешивается силой давления ртути на шайбу снизу, но это давление складывается из давления столба ртути высотой b и давления столба воды высотой a :

$$\rho_{\text{ш}} S g (a + b) = \rho_{\text{в}} S g a + \rho_{\text{рт}} S g b. \quad (4)$$

Откуда после очевидных преобразований для объёмов шайбы в воде $V_{\text{в}}$ и в ртути $V_{\text{рт}}$ имеем:

$$\frac{V_{\text{в}}}{V_{\text{рт}}} = \frac{\rho_{\text{рт}} - \rho_{\text{ш}}}{\rho_{\text{ш}} - \rho_{\text{в}}}. \quad (5)$$

При дальнейшем доливании воды будет одинаково расти сила давления на шайбу сверху и снизу, т. е. шайба будет оставаться на месте.

Эта задача когда-то привлекла внимание известного математика, выдающегося педагога Пойа (см. [1], стр. 61). Впрочем, у Пойа шла речь о шаре. Это может показаться читателю nepозволительной дерзостью, но решение Пойа представляется нам весьма формальным. Но действительно, несложно доказать, что для

тела любой формы ответ такой же, как для шайбы.

13) Нет оснований думать, что давление внутри пузыря очень заметно отличается от атмосферного (несложно, конечно, и оценить давление мыльной оболочки, но темы «Поверхностное натяжение» в последнее время нет в школьном курсе).

Условие плавания пузыря в воздухе – масса воздуха в объёме пузыря равна сумме масс гелия и мыльной оболочки. Из уравнения Клапейрона – Менделеева видно, что масса газа (при заданных значениях давления, объёма и температуры) пропорциональна его молярной массе. Молярная масса гелия 4 г/моль, а воздуха около 29 г/моль. Так что масса гелия внутри пузыря примерно в 7 раз меньше, чем масса вытесненного пузыря воздуха. Значит, остальные 6/7 массы пузыря – это масса мыльной оболочки.

Литература

1. Пойа Д. Математическое открытие. – М.: Наука, 1970.

Калейдоскоп Калейдоскоп Калейдоскоп

Самое невероятное событие в жизни

Результаты эксперимента с α -частицами, пропускаемыми сквозь тончайшую фольгу из золота, который ставил Ханс Гейгер по поручению великого английского физика Эрнеста Резерфорда, оказались столь удивительными, что Резерфорд писал: «Мне позвонил крайне возбуждённый Х. Гейгер и заявил: «Нам удалось наблюдать несколько α -частиц, рассеянных назад... Это было самым невероятным событием в моей жизни. Оно было столь же невероятным, как если бы 15-дюймовый снаряд, выпущенный в кусок папиросной бумаги, отскочил бы от неё и ударил в стреляющего»».