МАТЕМАТИКА • ФИЗИКА • ИНФОРМАТИКА

ПОТЕНЦИАЛ

ЕЖЕМЕСЯЧНЫЙ ЖУРНАЛ ДЛЯ СТАРШЕКЛАССНИКОВ И УЧИТЕЛЕЙ №4·2023

SAPERE AUDE – ДЕРЗАЙ ЗНАТЬ!

О ЧАСТНОМ РЕШЕНИИ ЛАГРАНЖА ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ В КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

ISSN 1814-6422

12+

МАТЕМАТИКА · ФИЗИКА · ИНФОРМАТИКА
ПОТЕНЦИАЛ
журнал для старшеклассников и учителей
АПРЕЛЬ №4 · 2023

В ЭТОМ НОМЕРЕ

Редакция журнала «Потенциал».
Адрес: 115184, г. Москва, Климентовский пер., д. 1
Тел. 8 (495) 768-25-48
E-mail: editor@edu-potential.ru
Подписано в печать 09.08.2023
Отпечатано в типографии ООО «Карандаш».
Печать офсетная. Бумага офсетная.
Усл. печ. л. 5. Формат 70x100 $^1/_{16}$.
Тираж 500 экз. Заказ №294.
109544, г. Москва, ул. Рабочая, 84c5

Журнал издаётся на средства выпускников технических вузов.

ISSN 1814-6422

Бондаров Михаил Николаевич
Учитель физики школы №1501 г. Москвы.
Почётный работник общего образования
Российской Федерации

Выбор пути решения задачи

Пример 1. Коварство силы трения

Приступая к решению физической задачи, нередко приходится делать выбор направления, по которому удобнее всего прийти к верному решению. Разумеется, речь идёт о достаточно сложных задачах, а не о тех, где искомый путь решения очевиден и однозначен.

Опыт анализа проверок работ выпускников школ показывает, что даже в случаях хорошо известных задач достаточно часто выбираются не самые оптимальные способы решения. Одной из причин этого (помимо наличия стресса в момент испытания) может служить то, что нередко ученики почти без раздумий выбирают традиционный путь, который ранее приводил их к успешному решению аналогичных задач. Однако случается, что иногда даже небольшое изменение всего лишь числового значения одного из параметров в условии может кардинально повлиять на характер решения. И тогда успешно справиться с возникающими затруднениями может помочь выбор оптимального способа решения.

Рассмотрим на примерах двух задач, как разумный выбор пути решения позволяет оптимизировать этот путь. Начнём с одной из самых известных задач динамики, аналог которой можно встретить во многих задачниках, на ЕГЭ и олимпиадах различного уровня.

Задача 1. На наклонной плоскости находится брусок массой $m = 0{,}5$ кг, соединённый невесомой нерастяжимой нитью, перекинутой через гладкий невесомый блок, с грузом массой $M = 0{,}35$ кг (рис. 1). Определите силу натяжения нити T, силу трения $F_{\text{тр}}$ между бруском и наклонной плоскостью, а также ускорение a бруска и груза после того, как система будет предоставлена самой себе. Коэффи-

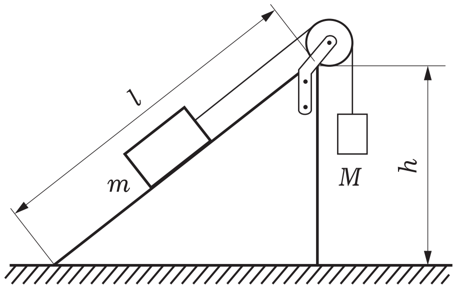

Рис. 1

циент трения между бруском и наклонной плоскостью $\mu = 0{,}25$, высота плоскости $h = 60$ см, её длина $l = 1$ м. Трением в оси блока пренебречь.

Первый способ решения

На первый взгляд, решение этой задачи не должно вызывать затруднений. Действительно, легко видеть, что мы имеем дело с динамической задачей, а в динамике, к счастью, существует чёткий алгоритм решения задач, который при его правильном использовании непременно должен привести нас к верному ответу.

Итак, приводим алгоритм в действие.

1) Решаем задачу в инерциальной системе отсчёта, связанной с наклонной плоскостью.

2) Изображаем на рисунке все силы, действующие на брусок и груз.

В этом пункте алгоритма мы сталкиваемся с первой и главной трудностью: среди сил присутствует коварная сила трения, действующая на брусок. В чём состоит её коварство? Направление всех остальных сил не вызывает сомнений: сила тяжести направлена вниз, сила натяжения – вдоль нити, сила нормального давления – перпендикулярно наклонной плоскости. А что можно в общем случае сказать о направлении силы трения? Ответ на этот вопрос зависит от характера движения тела: *если тело скользит, то сила трения скольжения направлена против относительной скорости тела; если покоится, то сила трения покоя противоположна внешней силе, стремящейся сдвинуть тело.*

К сожалению, в нашем случае мы заранее не знаем, что происходит с бруском: покоится ли он или движется по наклонной плоскости. А если движется, то в каком направлении? Попытка дать ответ на этот вопрос, опираясь на данные из условия, на первый взгляд, не приводит к однозначному результату. В самом деле, с одной стороны, брусок тяжелее груза, но, с другой стороны, груз висит на нити, а брусок лежит на плоскости, к тому же между ним и плоскостью имеется трение.

Один из возможных вариантов выбора дальнейшего пути решения описан в статье В. Нахшина «Уравнения думают за нас» [1]. Автор предлагал переложить наши заботы на уравнения. Разумеется, уравнения, записанные без ошибок, не должны нас подвести: они расскажут нам на своём языке, движутся ли тела или нет, и в каком направлении происходит движение.

Короче, прекратим наши гадания и предположим, что груз опускается с ускорением $\vec{a}'$, а брусок поднимается по наклонной плоскости с ускорением $\vec{a}$. Теперь картина сил, изображённая на рисунке 2, становится завершённой.

3) Используем далее идеализацию в условии.

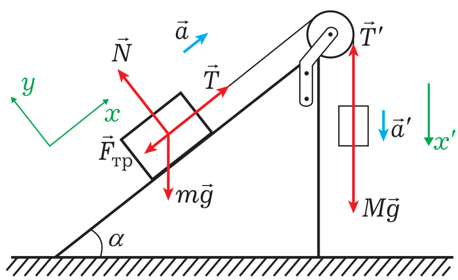

Рис. 2

Так как нить нерастяжима, то модули ускорений тел одинаковы: $a = a'$. Модули сил натяжения нити равны, так как нить невесома и блок идеален: $T = T'$.

4) Теперь можно записать уравнения второго закона Ньютона для каждого тела в проекциях на оси, изображённые на рисунке 2:

$$Mg - T = Ma_x, \qquad (1)$$

$$T - mg\sin\alpha - F_{\text{тр}} = ma_x, \qquad (2)$$

$$N - mg\cos\alpha = 0. \qquad (3)$$

5) При скольжении сила трения связана с силой нормального давления соотношением

$$F_{\text{тр}} = \mu N. \qquad (4)$$

6) Решая совместно уравнения (1) – (4), определим ускорение тел:

$$a_x = g\frac{M - m(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{M + m} \qquad (5)$$

7) Остаётся сделать последний маленький шажок: подставить числовые значения в конечную формулу (5). Но тут нас ждёт досадный результат: проекция ускорения на выбранное направление оказывается отрицательной $a_x \approx -0{,}59$ м / с^2.

Если бы между бруском и плоскостью отсутствовало трение, можно было бы считать, что задача решена. По сути дела, мы определили бы не только модуль ускорения, но и выяснили бы, что направление ускорения противоположно выбранному нами. Другими словами, брусок опускался бы с рассчитанным нами ускорением, а груз с тем же по модулю ускорением поднимался бы вверх.

Однако наличие трения значительно усложняет решение задачи. Теперь уже отрицательный результат говорит лишь о том, что наше первоначальное предположение о направлении движения тел неверно. Следовательно, придётся задачу решать вновь, развернув на 180° силу трения. Рисунок 3 соответствует нашему новому предположению: тела движутся в направлениях, противоположных тем, что были рассмотрены в первом случае.

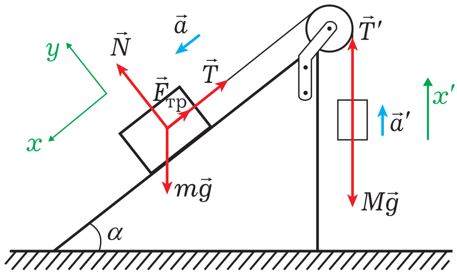

Рис. 3

Предоставим читателю самостоятельно вновь пройти весь путь решения, указав лишь конечный буквенный ответ:

$$a_x = g\frac{m(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - M}{M + m}. \qquad (6)$$

К сожалению, и в этом случае расчёт приводит нас к неутешительному результату: $a_x \approx -1{,}76$ м / с^2.

Выходит, что уравнения «запрещают» телам двигаться вообще! По условию первоначально тела находились в покое, значит, они и останутся в покое, то есть их ускорение $a = 0$. Таким образом, мы получили ответ на последний вопрос задачи.

Теперь уже легко определить две оставшиеся искомые величины. Так как груз M находится в покое, сила натяжения нити компенсирует силу тяжести, действующую на него, поэтому

$$T = Mg = 3{,}5\ \text{Н}. \qquad (7)$$

Напомним, что величину силы трения *покоя* нельзя искать по формуле (4), которую можно использовать только для нахождения силы трения *скольжения* и (или) *максимальной* силы трения покоя. В нашем случае для определения силы трения покоя воспользуемся условием неподвижности бруска, выраженным формулой (2), при $a_x = 0$. Тогда проекция силы трения покоя

$$F_{\text{тр}x} = T - mg\sin\alpha = 0{,}5\ \text{Н}. \qquad (8)$$

Эта проекция получилась положительной, следовательно, сила трения направлена вниз вдоль наклонной плоскости, как показано на рисунке 2. Обратим внимание, что при других числовых значениях могло быть иначе (см. задачу 3 для самостоятельного решения).

Заметим, что найденная нами величина действительно оказалась меньше максимальной силы трения покоя

$$F_{\text{тр.пок.max}} = \mu N = \mu mg\cos\alpha = 1\ \text{Н}.$$

Ответ: T = 3,5 Н; $F_{\text{тр}}$ = 0,5 Н; a = 0.

Комментарий к решению

Итак, задача решена. Подведём краткие итоги. Наиболее сложным в решении было нахождение ускорения тел. Мы полностью доверились проверенным веками законам Ньютона и не ошиблись: законы нас не подвели.

Какие же минусы можно отметить в этом способе решения? Прежде всего – это большие затраты времени. Кроме того, в случае возникновения ошибки в решении, например, при расчётах, не так легко было бы её обнаружить. Действительно, представим себе, что при подстановке в формулу (5) или (6) числовых значений был бы получен положительный результат. «Что ж, – мог подумать кто-то из допустивших такую расчётную ошибку, – решение задачи завершено, анализ буквенного ответа не позволяет выявить промах, числовой результат тоже получился правдоподобный. Таким образом, можно не волноваться по поводу своего решения».

Да, подобное случается практически с каждым: от ошибок никто не застрахован.

Главная трудность решения первым способом заключалась в том, что нам не удавалось уверенно определить направление силы трения. Поэтому мы вынуждены были гадать на... уравнениях. Другими словами, полученный из уравнений результат не был для нас предсказуем, мы вынуждены были просто поверить в него – увы! – без ясного понимания причин, которые привели к этому результату.

Но гадание – даже на великих законах Ньютона – едва ли можно считать оптимальным путём решения. Хотелось бы прийти к полученному результату иначе: чтобы физический смысл ответа был прозрачен и однозначно следовал из наших предположений, основанных на физических закономерностях.

Именно такой путь поможет нам осуществить

Второй способ решения

Напомним, что в случае сухого трения – трения между двумя твёрдыми телами – возможны два случая: трение скольжения, когда эта сила стремится препятствовать движению тела относительно другого, и трение покоя, когда данная сила препятствует самой возможности возникновения такого движения. В обоих случаях направление силы трения можно однозначно найти следующим образом.

1) Представим себе, что поверхности стали гладкими и сила трения исчезла. В этом случае легко определить, будет ли двигаться тело (или система тел) и в какую сторону.

2) Если мы выяснили таким образом направление движения тел в отсутствии трения, то очевидно, что сила трения (при его наличии) будет направлена в сторону, противоположную этому движению.

3) Остаётся выбрать между состоянием покоя и движением. Сделать это не сложно. Если максимальная сила трения покоя превышает равнодействующую всех остальных сил, действующих на тело вдоль поверхности соприкосновения, то тело останется в покое. В противном случае возникнет движение.

В нашей задаче (в отсутствие силы трения) удобно ввести изогнутую ось x, вдоль которой могут двигаться оба тела (рис. 4). В направлении этой оси на систему тел действуют извне только сила тяжести груза, проекция которой $(Mg)_x$ = 3,5 Н, и проекция силы тяжести бруска $(mg\sin\alpha)_x = -3$ Н. Выходит, что сила трения, приложенная к бруску, должна быть направлена против оси x, т.е. вниз по наклонной плоскости. Сравнив максимальную силу трения покоя $F_{\text{тр.пок.max}} = \mu mg\cos\alpha = 1$ Н с величиной $(Mg - mg\sin\alpha) = 0{,}5$ Н, убеждаемся, что система останется в покое (a = 0), а сила трения покоя равна 0,5 Н. Для нахождения силы натяжения нити, как и в первом способе решения, применим формулу (7).

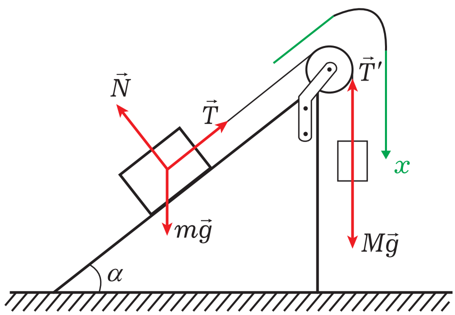

Рис. 4

Как видим, второй способ гораздо быстрее приводит к верному ответу, чем первый. Вместе с тем, обратим внимание на то, что в первом способе уже содержались предпосылки второго.

В самом деле, из формулы (5) непосредственно следует, что движение бруска вверх по наклонной плоскости возникает при $M > m(\sin\alpha + \mu\cos\alpha) =$ 0,4 кг, т.е. груз массой $M = 0{,}35$ кг слишком лёгок для такого движения. Аналогично, из формулы (6): брусок станет скользить вниз по наклонной плоскости, если $M < m(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) =$ 0,2 кг.

И снова наш груз для этого не подходит: теперь уже он слишком тяжёл. Тем самым найден диапазон $m(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) \le M \le m(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)$, которому должна принадлежать масса груза M, чтобы система «брусок – груз» оставалась в равновесии.

Перейдём теперь к более сложной задаче, предлагавшейся на курсе «Дополнительные главы физики: динамика и статика» Центра «Сириус».

Задача 2. Три длинные доски с массами m, $2m$ и $3m$ покоились (одна на другой, сложенные «стопкой», – рис. 5) на гладкой горизонтальной поверхности. По «средней» доске нанесли резкий удар, сообщив ей скорость $v_0 =$ 3 м/с, направленную точно вдоль досок. Коэффициент трения между верхней доской и средней равен $\mu_1 =$ 0,3, а коэффициент трения между средней доской и нижней равен $\mu_2 =$ 0,2. Через какое время после удара проскальзывание досок друг по другу полностью прекратится? Какой станет скорость досок после этого?

Рис. 5

Первый способ решения

Очевидно, что в этой задаче силы трения между досками определяют характер их движения. Важно разобраться с каждой силой трения в течение всего исследуемого времени, будет ли она силой трения покоя или силой трения скольжения.

Решаем задачу в инерциальной системе отсчёта, связанной с землёй.

Из условия ясно, что вначале доски скользят друг относительно друга. Средняя доска стремится выскользнуть, поэтому силы трения скольжения, действующие на неё со стороны верхней и средней досок, тормозят её и направлены влево. В то же время верхняя и нижняя доска разгоняются за счёт сил трения о среднюю доску, поэтому действующие на них силы трения скольжения направлены вправо.

Определим модули этих сил: между верхней и средней досками $F_{тр12} = \mu_1 mg$, а между средней и нижней – $F_{тр23} = \mu_2 3mg$. Из второго закона Ньютона находим модули ускорений досок при скольжении:

$$a_1 = \frac{\mu_1 mg}{m} = \mu_1 g = 3 \text{ м/с}^2;$$

$$a_2 = \frac{\mu_1 mg + \mu_2 3mg}{2m} = 0{,}5(\mu_1 + 3\mu_2)g = 4{,}5 \text{ м/с}^2;$$

$$a_3 = \frac{\mu_2 3mg}{3m} = \mu_2 g = 2 \text{ м/с}^2. \qquad (*)$$

Величины скоростей досок при скольжении зависят от времени следующим образом:

$$v_1 = a_1 t; \; v_2 = v_0 - a_2 t; \; v_3 = a_3 t.$$

Так как $a_1 > a_3$, то сначала прекратится скольжение верхней доски по средней. Это произойдёт через время t_1, когда их скорости сравняются:

$$a_1 t_1 = \upsilon_0 - a_2 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\upsilon_0}{a_1 + a_2} = 0{,}4 \text{ с.}$$

В этот момент скорости двух верхних досок станут равны

$$\upsilon_{12} = a_1 t_1 = \frac{a_1 \upsilon_0}{a_1 + a_2} = 1{,}2 \text{ м/с},$$

а третьей –

$$\upsilon_3 = a_3 t_1 = 0{,}8 \text{ м/с}.$$

Как будут двигаться доски после этого?

Ускорение нижней доски останется прежним (*): $a_3 = 2$ м/с^2, т.к. не изменится сила трения скольжения, действующая на неё со стороны средней доски.

Зато на верхние доски теперь действует тормозящая сила трения только со стороны нижней доски

$$F_{\text{тр}23} = \mu_2 3mg,$$

и они приобретают относительно земли ускорение

$$a_{12} = \frac{\mu_2 3mg}{3m} = \mu_2 g = a_3 = 2 \text{ м / с}^2.$$

Проскальзывание движущихся вместе верхней и средней доски по нижней будет длиться в течение времени t_2 до того момента, когда скорости всех досок сравняются, и оно прекратится:

$$\upsilon_{12} - a_3 t_2 = \upsilon_3 + a_3 t_2 \Rightarrow t_2 = \frac{\upsilon_{12} - \upsilon_3}{2a_3} =$$

$$= 0{,}1 \text{ с.}$$

Таким образом, проскальзывание досок друг по другу полностью прекратится через время

$$t_0 = t_1 + t_2 = 0{,}4 + 0{,}1 = 0{,}5 \text{ с.}$$

Искомую скорость досок в этот момент проще всего найти, зная, что только у нижней доски ускорение a_3 оставалось постоянным в течение всего времени t_0:

$$\upsilon = a_3 t_0 = 2 \cdot 0{,}5 = 1 \text{ м/с.} \qquad (**)$$

Ответ: $t_0 = 0{,}5$ с; $\upsilon = 1$ м/с.

<u>Комментарий к решению</u>

Подробное решение задачи позволило детально рассмотреть характер движения каждой доски в течение всего времени $t_0 = 0{,}5$ с от начала движения до момента прекращения проскальзывания досок друг по другу. Для полноты понимания происходящего можно построить графики зависимости скоростей досок от времени (рис. 6).

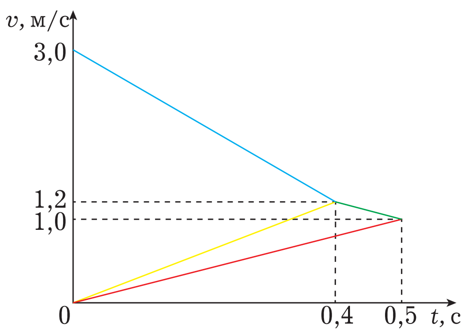

Рис. 6

Читатель без труда определит, какой из этих графиков соответствует каждой доске.

Возникает вопрос: удастся ли решить задачу иначе, не рассчитывая всех характеристик движения каждой доски. Оказывается, это возможно: анализируя первый способ решения, можно найти более быстрый

Второй способ решения

Напомним, что задача предлагалась на курсе, где разбирались законы динамики. И именно уравнения динамики (вместе с формулами кинематики) были использованы нами в первом способе решения.

Посмотрим на происходящие в задаче процессы по-другому, применив один из законов сохранения.

Поскольку на систему из трёх досок в горизонтальном направлении внешние силы не действуют, можно использовать закон сохранения импульса (ЗСИ), который позволит сразу ответить на второй вопрос. Найдём с помощью ЗСИ скорость досок после прекращения проскальзывания:

$$2m\upsilon_0 = 6m\upsilon \Rightarrow \upsilon = \frac{\upsilon_0}{3} = 1 \text{ м/с.} \quad (***)$$

Отлично! Теперь нам известны начальные и конечные скорости всех досок. В решении первым способом мы уже обращали внимание на то, что наиболее простым было движение нижней доски: в течение всего времени t_0 с постоянным ускорением $a_3 = 2$ м/с^2. В том решении время t_0 было найдено независимо, что позволило вычислить конечную скорость υ. В нашем новом способе решения эта скорость υ найдена с помощью ЗСИ, следовательно, формула (**) позволит нам сразу получить ответ на первый вопрос задачи:

$$t_0 = \upsilon / a_3 = 0{,}5 \text{ с.}$$

Подводим итог. Решение задачи вторым способом было значительно короче; нам понадобились только три закономерности:

1) ЗСИ (***);

2) второй закон Ньютона для нижней доски (*);

3) формула зависимости скорости нижней доски от времени (**).

Заключение

В не столь отдалённые времена на олимпиадах существовала хорошая традиция: отмечать призами или дополнительными баллами яркие и неожиданные идеи в решениях задач. Имел место даже уникальный случай, когда на заключительном этапе Всесоюзной олимпиады (правда, математической) была присуждена первая премия ученику, решившему (и потрясшему своим решением жюри) только одну задачу! [7]

На примере двух задач мы попытались показать (в рамках заявленной темы) те способы решения, которые доставили много положительных эмоций любителям физики.

Если читатель испытал ту же радость, что и они, от красоты альтернативных способов решения и у него появилось желание не просто решать задачи, а по возможности искать необычные пути решения, считаем, что мы достигли поставленной цели.

«Ну, а если вам не доставляет удовольствия решать хитрые задачи, то не надо этого делать ни в коем случае – ведь столько есть на свете интересных вещей – собирание марок, например». [8]

В рассмотренных выше задачах были показаны лишь некоторые примеры коварства силы трения.

Разобранными примерами, конечно, не исчерпываются особенности этой силы, проявляющиеся в различных ситуациях. Интересующимся читателям рекомендуем статьи [2] – [6] в журналах «Квант» и «Потенциал», содержащие большое количество подробно решённых задач разной степени сложности.

Литература

1. Нахшин В. Уравнения думают за нас // Квант. – 1981. – №9. – С. 42–45.
2. Чивилёв В.И. Сила трения // Потенциал. – 2005. – №9. – С. 18–30.
3. Бондаров М.Н. Осторожно! Сила трения // Потенциал. – 2008. – №10. – С. 27–33.
4. Черноуцан А. Задачи на силу трения // Квант. – 2016. – №1. – С. 51–56.
5. Асламазов Л. Силы трения и движение // Квант. – 1980. – №11. – С. 38–41.
6. Баканина Л. О силах трения // Квант. – 1978. – №11. – С. 48–51.
7. Гальперин Г.А., Толпыго А.К. Московские математические олимпиады: Кн. для учащихся / Под ред. А.Н. Колмогорова. – М.: Просвещение, 1986. – 303 с., ил.
8. Буздин А.И., Зильберман А.Р., Кротов С.С. Раз задача, два задача… – М.: Наука, 1990. – 240 с.

Задачи для самостоятельного решения

Задача 3. Решить задачу 1 при следующих значениях массы груза M: а) 0,1 кг; б) 0,25 кг; в) 0,3 кг; г) 0,5 кг.

Ответ: а) 1,2 Н; 1 Н; 1,7 м/с^2; б) 2,5 Н; 0,5 Н; 0; в) 3 Н; 0; 0; г) 4,5 Н; 1 Н; 1 м/с^2.

Задача 4. На горизонтальной поверхности покоились две лежащие друг на друге доски с массами $2m$ и $3m$, и при этом на верхней покоился небольшой брусок массой m. Известно, что все коэффициенты трения (между бруском и верхней доской, между верхней доской и нижней доской, между нижней доской и поверхностью) одинаковы и равны μ. Нижнюю доску подталкивают, действуя на неё постоянной силой $F = 15\mu mg$, направленной строго вдоль досок (рис. 7). Во сколько раз отличается ускорение нижней доски $a_{\text{нд}}$ в начале движения от ускорения бруска $a_{\text{б}}$?

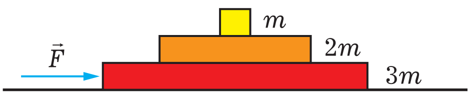

Рис. 7

Ответ: 2.

МУДРЫЕ МЫСЛИ

Чтобы научить физика понимать природу физических проблем, требуется так много времени, что он слишком стар, чтобы решать их.

Юджин-Поль Вигнер