ISSN 0130-2221
СЕНТЯБРЬ/ДЕКАБРЬ
2014 · №5-6

# КВАНТ

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

# КВАНТ СЕНТЯБРЬ ДЕКАБРЬ 2014 №5-6

НАУЧНО-ПОПУЛЯРНЫЙ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ЖУРНАЛ

ИЗДАЕТСЯ С ЯНВАРЯ 1970 ГОДА

В номере:



2 Два века теоремы Понселе. *В.Протасов*
13 Хищник и жертва: уравнения сосуществования. *К.Богданов*
18 Из записной книжки учителя. *А.Рыбаков*

ИЗ ИСТОРИИ НАУКИ

23 Каким я запомнил П.Л.Капицу. *Ю.Ципенюк*

ЗАДАЧНИК «КВАНТА»

26 Задачи М2356–М2365, Ф2363–Ф2372
28 Решения задач М2341–М2348, Ф2348–Ф2354
36 Проверь интуицию!

«КВАНТ» ДЛЯ МЛАДШИХ ШКОЛЬНИКОВ

38 Задачи
39 Конкурс имени А.П.Савина «Математика 6–8»
39 Как Бусенька училась умножать на одиннадцать. *Д.Кохась, К.Кохась*

ШКОЛА В «КВАНТЕ»

42 Дедал, Икар и центробежная сила. *А.Стасенко*
43 Безработные силы. *А.Стасенко*
44 Физическое судоку. *Е.Соколов*
50 Пять окружностей. *В.Дроздов*

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

52 Задача о фруктовом саде. *В.Янкович*

КАЛЕЙДОСКОП «КВАНТА»

48 Действия полей

ЛАБОРАТОРИЯ «КВАНТА»

54 Вакуумный насос, наши легкие и камера «Мирабель». *С.Дворянинов, В.Соловьев*

ПРАКТИКУМ АБИТУРИЕНТА

56 Колебательный контур и законы сохранения. *М.Бондаров*

ОЛИМПИАДЫ

61 Заключительный этап XL Всероссийской олимпиады школьников по математике
63 Заключительный этап XLVIII Всероссийской олимпиады школьников по физике
66 LV Международная математическая олимпиада
68 XLV Международная физическая олимпиада

ИНФОРМАЦИЯ

72 Очередной набор в ВЗМШ
77 Заочная физико-техническая школа при МФТИ
80 Новый прием в школы-интернаты при университетах

82 Ответы, указания, решения
95 Напечатано в 2014 году

Памяти К.Ю.Богданова (13)

Памяти В.А.Сендерова (37)

НА ОБЛОЖКЕ

I *Иллюстрация к статье В.Протасова*
II *Коллекция головоломок*
III *Шахматная страничка*
IV *Прогулки с физикой*

# Колебательный контур и законы сохранения

## (Поучительная физическая история в шести явлениях с прологом и эпилогом)

***М.БОНДАРОВ***

Одной из самых сложных тем школьного курса физики является «Колебательный контур». И это не случайно. Данной темой завершается раздел «Электродинамика», а следовательно, в задачах могут появиться персонажи, которых мы встречали в первых темах раздела. «Постойте, – может удивиться читатель, – а почему элементы электрических цепей названы персонажами? Что общего у театральной пьесы и физической задачи?» Если немного пофантазировать, то найти общее не очень трудно. Физические явления, описываемые в задачах, в некотором смысле можно сравнить с происходящими на театральной сцене событиями, а физические приборы во многом похожи на героев пьес. Они тоже имеют свои привычки, которые иногда по ходу действия могут меняться.

На примере решения конкретных задач попробуем проследить, какие изменения в физических процессах в контуре появляются вместе с приходом в него очередного персонажа – нового элемента электрической цепи. Объединяет нашу подборку задач тот факт, что для решения всех разбираемых здесь задач потребуется знание сравнительно небольшого количества физических законов, и прежде всего – *законов сохранения*. Напомним, что законы сохранения обладают замечательной особенностью: способностью предсказать по начальным условиям конечный результат, даже если не известно, что происходит на промежуточных этапах.

Итак, переходим к непосредственному знакомству с нашими героями.

*Действующие лица*: конденсаторы, катушки индуктивности, диоды, источники тока, резисторы, ключи и соединительные провода.

### Пролог

На нашей импровизированной сцене появляются главные герои всех физических задач по теме «Колебательный контур» – идеальный конденсатор и идеальная катушка индуктивности. Соединив их проводниками, получим идеальный колебательный контур (рис.1). Поясним кратко, что понимается под их идеальностью. У идеального конденсатора можно пренебречь его проводимостью, а у идеальной катушки – ее межвитковой емкостью и омическим сопротивлением обмотки. Таким образом, в идеальном контуре обязательно выполняется энергетический баланс: энергия из контура не уходит, она только перекачивается от конденсатора к катушке и наоборот. Напомним, что конденсатор емкостью $C$, напряжение на котором $U$, накапливает энергию электрического поля $W_э = \frac{CU^2}{2}$, а катушка индуктивностью $L$ при силе тока $I$ – энергию магнитного поля $W_м = \frac{LI^2}{2}$.

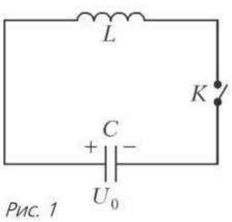

Рис. 1

Характер взаимоотношений наших героев можно понять при решении конкретных задач, в которых они проявляют присущие им свойства.

### Явление первое: идеальный колебательный контур

**Задача 1** (ЕГЭ). *В идеальном колебательном контуре амплитуда колебаний силы тока в катушке индуктивности $I_m$ = 5 мА, а амплитуда напряжения на конденсаторе $U_m$ = 2,0 В. В момент времени $t$ напряжение на конденсаторе $U$ = 1,2 В. Найдите силу тока в катушке в этот момент.*

**Решение.** Поскольку контур идеальный, энергия будет неизменной в любой момент времени. Запишем соответствующие выражения для полной энергии контура в те моменты, когда сила тока в катушке максимальна:

$$W_1 = \frac{LI_m^2}{2},$$

когда максимально напряжение на конденсаторе:

$$W_2 = \frac{CU_m^2}{2},$$

а также в момент времени $t$:

$$W_3 = \frac{CU^2}{2} + \frac{LI^2}{2}.$$

Так как энергия сохраняется, получим систему уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{CU^2}{2} + \dfrac{LI^2}{2} = \dfrac{LI_m^2}{2}, \\ \dfrac{CU_m^2}{2} = \dfrac{LI_m^2}{2}, \end{cases}$$

из которой и определим искомую величину:

$$I = I_m\sqrt{1 - \frac{U^2}{U_m^2}} = 4 \text{ мА}.$$

### Явление второе: два конденсатора и катушка

Что нового в работу контура может внести появление второго конденсатора? Очевидно, что добавить его можно, соединив с первым конденсатором либо параллельно, либо последовательно. В простейшем случае, когда оба параллельно соединенных конденсатора в начальный момент были заряжены и имели одинаковое напряжение, задача решается подобно предыдущей. Нужно только лишь заменить два конденсатора одним с общей емкостью $C = C_1 + C_2$.

Если же второй конденсатор в начальный момент не был заряжен, то решение задачи усложняется. В этом случае в дополнение к закону сохранения энергии надо будет воспользоваться еще законом сохранения электрического заряда.

**Задача 2** (VIII Всесоюзная олимпиада школьников по физике, 1974). *Два одинаковых конденсатора A и B, каждый емкостью C, и катушка индуктивностью L соединены, как показано на рисунке 2. В начальный момент ключ K разомкнут, конденсатор A заряжен до разности потенциалов $U_0$. Конденсатор B не заряжен, ток в катушке отсутствует. Определите максимальное значение силы тока в катушке после замыкания ключа.*

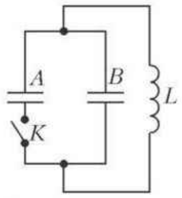

Рис. 2

**Решение.** После замыкания ключа в системе начнут происходить довольно сложные процессы, полное и точное описание которых не под силу школьнику. К счастью, для определения искомой величины этого и не требуется.

Можно считать, что конденсаторы $A$ и $B$ представляют собой колебательный контур с очень малой индуктивностью. В таком контуре возникают колебания очень большой частоты (по сравнению с частотой колебаний контура с индуктивностью $L$). Поэтому заряды на конденсаторах успеют перераспределиться задолго до того, как по катушке начнет идти ток. Колебания в контуре из двух конденсаторов прекратятся, когда у них выровняются напряжения. Определим установившееся напряжение с помощью закона сохранения электрического заряда:

$$CU_0 = 2CU \text{ , и } U = \frac{U_0}{2} .$$

Внимательный читатель, конечно, заметит, что при этом оказался нарушен баланс энергии в системе конденсаторов. Действительно, начальная энергия была равна $W_0 = \frac{CU_0^2}{2}$. После перераспределения зарядов суммарная энергия конденсаторов оказалась равной $W = 2\frac{CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{4}$. Таким образом, половина первоначальной энергии исчезает, точнее – часть энергии переходит во внутреннюю (нагреваются провода), часть излучается.

А что будет происходить в контуре дальше? После установления общего напряжения $U$ на конденсаторах возникнут колебания в идеальном контуре, состоящем из двух параллельно соединенных конденсаторов и катушки индуктивности. Ток в катушке достигнет максимального значения, когда конденсаторы полностью разрядятся. Искомую величину найдем из закона сохранения энергии:

$$\frac{CU_0^2}{4} = \frac{LI_m^2}{2} \text{ , и } I_m = U_0\sqrt{\frac{C}{2L}} .$$

**Задача 3** (МФТИ, 2001). *При замкнутом ключе $K$ в $LC$-контуре (рис.3) происходят незатухающие свободные колебания тока. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе емкостью $C_1$ максимально и равно $U_1$, ключ $K$ размыкают. Определите максимальное значение тока в контуре после размыкания ключа. Параметры элементов схемы указаны на рисунке.*

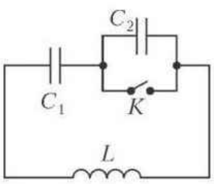

Рис. 3

**Решение.** Ток в катушке максимален, когда напряжение на ее концах равно нулю. В этот момент конденсаторы должны иметь одинаковое по модулю напряжение $U$, величину которого найдем из закона сохранения электрического заряда:

$$C_1U_1 = (C_1 + C_2)U \text{ , и } U = \frac{C_1U_1}{C_1 + C_2} .$$

Для определения искомой силы тока используем вновь закон сохранения энергии:

$$\frac{C_1U_1^2}{2} = \frac{(C_1 + C_2)U^2}{2} + \frac{LI_m^2}{2} .$$

Решив полученную систему уравнений, находим

$$I_m = U_1\sqrt{\frac{C_1C_2}{L(C_1 + C_2)}} .$$

### Явление третье: два конденсатора, катушка и диод

Добавим к нашим персонажам идеальный диод. Его роль в контуре достаточно проста: в одном направлении сопротивление диода пренебрежимо мало и он полностью пропускает ток, зато в противоположном направлении его сопротивление стремится к бесконечности и ток в контуре прекращается.

**Задача 4** (МФТИ, 1972). *Конденсатор емкостью $C_1$ = = 1 мкФ заряжен до разности потенциалов $U_0$ = 300 В. К нему через идеальный диод $D$ и катушку индуктивностью $L$ подключают незаряженный конденсатор емкостью $C_2$ = = 2 мкФ (рис.4). До какой разности потенциалов зарядится этот конденсатор после замыкания ключа $K$? Индуктивность $L$ достаточно велика, так что процесс перезарядки происходит медленно.*

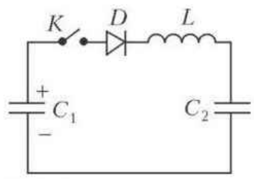

Рис. 4

**Решение.** В условии не случайно сказано, что индуктивность $L$ достаточно велика и поэтому процесс перезарядки происходит медленно. Отсюда следует, что потерь на излучение (как это было в задаче 2) нет. Кроме того, как обычно, контур считается идеальным, следовательно, тепловых потерь также нет, а значит, можно использовать закон сохранения энергии в виде

$$\frac{C_1U_0^2}{2} = \frac{C_1U_1^2}{2} + \frac{C_2U_2^2}{2} .$$

Далее запишем закон сохранения электрического заряда:

$$C_1U_0 = C_1U_1 + C_2U_2 .$$

Приведенная система уравнений позволяет найти искомую величину:

$$U_2 = 2U_0\frac{C_1}{C_1 + C_2} = 200 \text{ В.}$$

На этом можно было бы завершить решение, но интересно посчитать, чему равно напряжение $U_1$ в этот момент. Посчитали? И еще. А что было бы, если бы диод в схеме отсутствовал? Подумайте над этим.

### Явление четвертое: конденсатор и две катушки

Настало время добавить вторую катушку в контур. Причем соединить ее с первой можно, как и в случае с конденсаторами, теми же двумя способами. Поэтому рассмотрим еще две задачи, включив в контур вторую катушку сначала параллельно первой, затем последовательно. При решении этих задач уже не удастся ограничиться прежними двумя законами сохранения, потребуются еще закон Ома и закон сохранения магнитного потока.

**Задача 5** (МФТИ, 2001). *При разомкнутом ключе $K$ в $LC$-контуре (рис. 5) происходят незатухающие свободные колебания тока. В тот момент, когда ток в цепи максимален и равен $I_0$, замыкают ключ $K$. Определите максимальное напряжение на конденсаторе после замыкания ключа. Параметры схемы указаны на рисунке.*

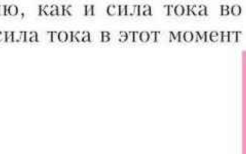

Рис. 5

**Решение.** Мы не будем торопиться сразу использовать законы сохранения. Рассмотрим сначала физику происходящих в контуре процессов.

В первый момент после замыкания ключа напряжение на конденсаторе останется равным нулю, как и сила тока во второй катушке. В первой катушке сила тока в этот момент равна $I_0$. Затем токи в катушках начнут меняться. Характер этих изменений определяется законом Ома для контура, охватывающего две катушки:

$$L_1 \frac{dI_1}{dt} + L_2 \frac{dI_2}{dt} = 0 .$$

Отсюда следует

$$L_1 I_1 + L_2 I_2 = \text{const} .$$

Это выражение и можно трактовать как закон сохранения магнитного потока. Этот закон не является фундаментальным, подобно законам сохранения энергии или электрического заряда, однако его очень удобно применять во многих случаях, когда цепь содержит идеальные катушки.

По условию задачи нас интересует тот момент времени, когда напряжение на конденсаторе достигает максимального значения. С физической точки зрения это означает, что заряд конденсатора максимален, т.е. ток через него не течет. Значит, в этот момент ток, обозначим его $I$, идет только по катушкам. Применим теперь закон сохранения магнитного потока для двух моментов времени – сразу после замыкания ключа и когда напряжение на конденсаторе максимально:

$$L_1 I_0 = (L_1 + L_2) I ,$$

откуда

$$I = \frac{L_1 I_0}{L_1 + L_2} .$$

Заметим, однако, что найденный ток не является максимальным. Для нахождения искомой величины осталось применить закон сохранения энергии:

$$\frac{L_1 I_0^2}{2} = \frac{(L_1 + L_2) I^2}{2} + \frac{C U_m^2}{2} .$$

Из последних двух равенств получим

$$U_m = I_0 \sqrt{\frac{L_1 L_2}{C (L_1 + L_2)}} .$$

**Задача 6** (МФТИ, 1998). *В схеме, изображенной на рисунке 6, сверхпроводящие катушки с индуктивностями $L_1$ и $L_2$ соединены последовательно с конденсатором емкостью С. В начальный момент ключи $K_1$ и $K_2$ разомкнуты, а конденсатор заряжен до напряжения $U_0$. Сначала замыкают ключ $K_1$, а после того, как напряжение на конденсаторе станет равным нулю, замыкают ключ $K_2$. Через некоторое время после замыкания ключа $K_2$ конденсатор перезарядится до некоторого максимального напряжения $U_m$. Найдите ток через катушки индуктивности непосредственно перед замыканием ключа $K_2$. Найдите также напряжение $U_m$.*

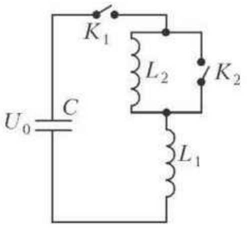

Рис. 6

**Решение.** Ответ на первый вопрос получается сразу из закона сохранения энергии. Поскольку в момент замыкания второго ключа напряжение на конденсаторе отсутствует, значит, энергия его электрического поля полностью перешла в энергию магнитного поля двух катушек:

$$\frac{C U_0^2}{2} = \frac{(L_1 + L_2) I_m^2}{2} ,$$

откуда находим

$$I_m = U_0 \sqrt{\frac{C}{L_1 + L_2}} .$$

[redacted]

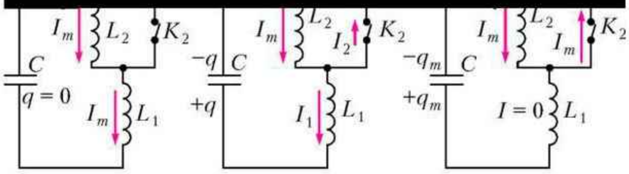

Рис. 7

Попробуем проследить детально дальнейшую картину событий, происходящих в цепи. В первый момент после замыкания ключа $K_2$ ток в обеих катушках остается прежним и равным $I_m$, а конденсатор не заряжен (рис.7,*а*). Затем ток в первой катушке начнет уменьшаться, и конденсатор за счет этого будет заряжаться (рис.7,*б*). А вот во второй катушке ток изменяться не будет. Запрет на его изменение наложил закон сохранения магнитного потока или, если кому-то так нравится больше, закон Ома для контура, охватывающего вторую катушку и ключ. И так будет продолжаться до того момента, пока напряжение на конденсаторе не станет максимальным. Как мы уже отмечали в предыдущей задаче, это означает, то на конденсатор перестают поступать новые заряды, а значит, нет тока в первой катушке. Во второй же катушке ток по-прежнему будет оставаться неизменным и равным начальному в момент замыкания ключа $K_2$ (рис.7,*в*). Следовательно, в конечный момент энергия контура состоит из двух слагаемых: энергии конденсатора и энергии второй катушки.

Запишем теперь закон сохранения энергии для начального и конечного состояний контура:

$$\frac{C U_0^2}{2} = \frac{C U_m^2}{2} + \frac{L_2 I_m^2}{2} .$$

Подставив в это выражение найденное ранее значение $I_m$, определим искомое напряжение:

$$U_m = U_0 \sqrt{\frac{L_1}{L_1 + L_2}} .$$

### Явление пятое: конденсатор, катушка, диод и источник тока

Добавление в колебательный контур идеального источника тока (с нулевым внутренним сопротивлением) приводит к тому, что в энергетическом балансе придется учитывать работу источника.

**Задача 7** (ЕГЭ). *В цепи, состоящей из источника тока с ЭДС $\mathscr{E}$, конденсатора емкостью С, катушки индуктивностью L и идеального диода D, ключ K первоначально разомкнут (рис.8). Определите напряжение, до которого зарядится конденсатор после замыкания ключа. Диод считается идеальным, если его сопротивление в прямом направлении бесконечно мало, а в обратном направлении – бесконечно велико. Внутреннее сопротивление источника тока равно нулю.*

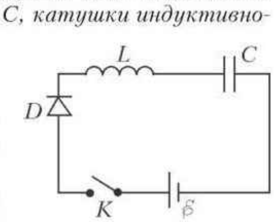

Рис. 8

**Решение.** Обозначим искомое напряжение конденсатора $U$. За время зарядки конденсатора через источник пройдет заряд $q = CU$, переместившийся с правой пластины конденсатора на левую. При этом источник совершит работу

$$A = q\mathscr{E} = CU\mathscr{E} ,$$

а конденсатор приобретет энергию

$$W = \frac{CU^2}{2}.$$

По закону сохранения энергии,

$$A = W, \text{ или } CU\mathcal{E} = \frac{CU^2}{2},$$

откуда находим искомое напряжение конденсатора:

$$U = 2\mathcal{E}.$$

### Явление шестое: те же и резисторы

Введение активного сопротивления в контур приводит к тому, что контур теряет свою идеальность: колебания в нем становятся затухающими, а запасенная в нем энергия полностью или частично превращается во внутреннюю (в системе выделяется тепло).

**Задача 8** (ЕГЭ). *Ключ K в схеме, показанной на рисунке 9, в начальный момент был замкнут. Определите количество теплоты, выделившееся на резисторе сопротивлением R после размыкания ключа. Индуктивность катушки $L = 4 \cdot 10^{-6}$ Гн, емкость конденсатора $C = 7 \cdot 10^{-5}$ Ф, сопротивления резисторов $R_0 = 10$ Ом, $R = 15$ Ом, ЭДС источника $\mathcal{E} = 450$ В.*

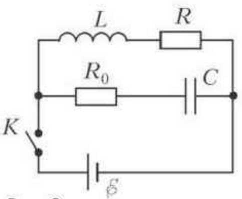

Рис. 9

**Решение.** Перед размыканием ключа постоянный ток шел через источник, катушку и резистор сопротивлением $R$, а конденсатор находился под напряжением $\mathcal{E}$ (внутреннее сопротивление источника равно нулю), равным напряжению на резисторе сопротивлением $R$ (через ветвь $R_0C$ ток не идет, а сопротивление постоянному току идеальной катушки пренебрежимо мало). Из закона Ома находим этот ток:

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}.$$

В момент размыкания ключа в колебательном контуре возникают затухающие колебания, в результате которых вся запасенная энергия выделяется в виде тепла на резисторах. Эту полную энергию легко посчитать: она состоит из энергии электрического поля конденсатора $W_э = \frac{C\mathcal{E}^2}{2}$ и энергии магнитного поля катушки $W_м = \frac{LI_0^2}{2} = \frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2}$. Таким образом, общее количество теплоты, выделившееся в контуре, равно

$$Q = W_э + W_м = \frac{C\mathcal{E}^2}{2} + \frac{L\mathcal{E}^2}{2R^2}.$$

Однако на резисторе сопротивлением $R$ выделится лишь часть этого тепла. Какая именно, мы определим из закона Джоуля–Ленца $Q = I^2Rt$. Нас не будет пугать тот факт, что этот закон справедлив лишь для постоянного тока. Оба резистора соединены в контуре последовательно, поэтому в любые малые промежутки времени, для которых мы и будем использовать закон Джоуля–Ленца, токи в резисторах одинаковы, поэтому отношение количеств теплоты, выделившихся в резисторах, легко найти:

$$\frac{Q_1}{Q_2} = \frac{R}{R_0} = \frac{3}{2}.$$

Следовательно,

$$Q_1 = \frac{R}{R+R_0}Q = \frac{3}{5}Q = \frac{3\mathcal{E}^2}{10}\left(C + \frac{L}{R^2}\right) \approx 4{,}3 \text{ Дж}.$$

**Задача 9** (олимпиада «Физтех-2013»). *В колебательном контуре (рис.10) происходят колебания. Максимальное напряжение на конденсаторе емкостью $C = 40$ мкФ равно $U_0 = 2$ В. Параллельно конденсатору подсоединены через ключ (изначально разомкнутый) параллельно соединенные резистор и катушка с индуктивностью, в $k = 3$ раза меньшей индуктивности катушки колебательного контура. Ключ замыкают в момент, когда напряжение на конденсаторе становится в $n = 2$ раза меньше своего максимального значения. Какое количество теплоты выделится в резисторе после замыкания ключа? Омическим сопротивлением катушек и сопротивлением соединительных проводов пренебречь.*

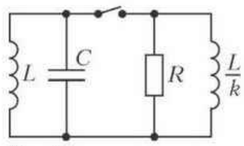

Рис. 10

**Решение.** Запишем закон сохранения энергии для двух состояний контура – начального и непосредственно перед замыканием ключа:

$$\frac{CU_0^2}{2} = \frac{LI_0^2}{2} + \frac{C}{2}\left(\frac{U_0}{n}\right)^2,$$

откуда определим величину тока в момент замыкания ключа:

$$I_0 = \sqrt{\frac{\left(n^2-1\right)CU_0^2}{n^2L}}.$$

Сразу после замыкания ключа ток останется таким же, не изменится и магнитный поток:

$$LI_0 = \frac{L}{k}I + LI,$$

где $I$ – конечное значение тока в катушках. В отличие от задачи 8, в резисторе выделится не вся запасенная в контуре энергия: часть ее сохранится у магнитного поля в катушках. Поэтому в резисторе выделится количество теплоты

$$Q = \frac{CU_0^2}{2} - \left(\frac{LI^2}{2} + \frac{(L/k)I^2}{2}\right).$$

Из трех последних уравнений получим ответ:

$$Q = \frac{CU_0^2}{2}\left(1 - \frac{k}{k+1}\frac{n^2-1}{n^2}\right) = \frac{7CU_0^2}{32} = 35 \text{ мкДж}.$$

И наконец, рассмотрим задачу, в которой принимают участие почти все герои нашей поучительной истории.

**Задача 10** (физико-математическая олимпиада МФТИ, 2005). *В схеме, изображенной на рисунке 11, конденсатор емкостью C заряжен до напряжения $U_0$, конденсатор емкостью 2C не заряжен, ключи разомкнуты. Ключ $K_1$ замыкают. Когда ток в катушке индуктивностью L достигает максимального значения, замыкают ключ $K_2$. Какое количество теплоты выделится на резисторе сопротивлением R? Параметры схемы указаны на рисунке. Считайте, что сопротивления катушек, подводящих проводов и ключей пренебрежимо малы.*

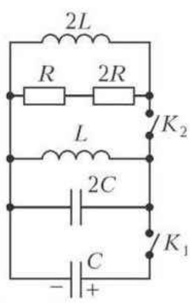

Рис. 11

**Решение.** Чтобы разобраться в процессах, происходящих в этой достаточно сложной цепи, попробуем увидеть в ней элементы цепей из рассмотренных ранее задач.

Итак, после замыкания ключа $K_1$ два конденсатора и катушка индуктивностью $L$ соединены так же, как в задаче 2. Применим и в этой задаче те же законы, т.е. закон сохранения электрического заряда:

$$CU_0 = CU + 2CU, \text{ или } U = \frac{U_0}{3},$$

и закон сохранения энергии:

$$\frac{(C+2C)U^2}{2} = \frac{LI^2}{2}, \text{ или } I = U\sqrt{\frac{3C}{L}} = \frac{U_0}{3}\sqrt{\frac{3C}{L}}.$$

Следовательно, мы рассчитали ток, который будет идти по катушке индуктивностью $L$ перед замыканием ключа $K_2$.

Две катушки с резистором нам встречались в задаче 9 (помните: в резисторе выделится не вся энергия, запасенная в первой катушке). После замыкания ключа $K_2$ по катушкам будет циркулировать ток, величину которого найдем из закона сохранения магнитного потока:

$$LI = LI_1 + 2LI_1, \text{ или } I_1 = \frac{I}{3} = \frac{U_0}{9}\sqrt{\frac{3C}{L}}.$$

Для определения количества теплоты, выделившегося в системе, используем энергетический баланс:

$$Q = W - W_1,$$

где $W$ – энергия в момент замыкания ключа $K_2$, сосредоточенная в катушке индуктивностью $L$ и равная (как и в задаче 2) суммарной энергии конденсаторов сразу после перераспределения в них зарядов:

$$W = \frac{3CU^2}{2} = \frac{CU_0^2}{6},$$

$W_1$ – энергия магнитного поля токов, оставшихся течь в катушках после замыкания ключа $K_2$:

$$W_1 = \frac{3LI_1^2}{2} = \frac{CU_0^2}{18}.$$

Таким образом,

$$Q = W - W_1 = \frac{CU_0^2}{6} - \frac{CU_0^2}{18} = \frac{CU_0^2}{9}.$$

Но это еще не окончательный ответ (вспомним теперь задачу 8). Ведь мы нашли тепло, выделившееся в двух резисторах, а требуется найти только в первом. Резисторы соединены последовательно, поэтому для любых малых промежутков времени через них идут равные токи, а значит, из закона Джоуля–Ленца следует, что на первом резисторе выделяется вдвое меньше тепла, чем на втором. Поэтому искомое количество теплоты составляет третью часть от полного:

$$Q_1 = \frac{1}{3}Q = \frac{CU_0^2}{27}.$$

### Эпилог

При решении задач по теме «Колебательный контур» главную роль играют законы сохранения: 1) энергии, 2) электрического заряда, 3) магнитного потока. Мы выяснили, что эти законы могут оказать эффективную помощь даже в тех случаях, когда у нас нет возможности полностью разобраться во всех тонкостях происходивших физических процессов.

Что же осталось за рамками статьи? Какие еще приключения могут ожидать наших героев? Подумайте об этом самостоятельно.

### Упражнения

**1** (ЕГЭ). В идеальном колебательном контуре амплитуда колебаний силы тока в катушке индуктивности 5 мА, а амплитуда колебаний заряда конденсатора 2,5 нКл. В момент времени $t$ сила тока в катушке равна 3 мА. Найдите заряд конденсатора в этот момент.

**2** (олимпиада «Покори Воробьевы горы», 2010). В схеме, показанной на рисунке 12, ключ $K$ первоначально был разомкнут, конденсатор емкостью $C_1$ разряжен, а заряд конденсатора емкостью $C_2$ был равен $q$. Ключ на длительное время перевели в положение *1*, а затем – в положение *2*. Зная сопротивление резистора $R$, емкости конденсаторов $C_1$ и $C_2$ и амплитуду тока $I_0$ в контуре $LC_1$, определите индуктивность $L$ катушки.

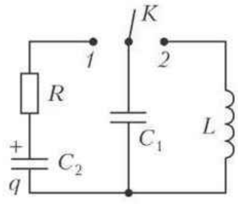

Рис. 12

**3** (НГУ, 2002). В момент, когда в колебательном контуре из катушки индуктивностью $L$ и конденсатора емкостью $C$ ток достиг максимального значения $I_m$, замыкают ключ $K$, подсоединив катушку индуктивностью $L_1$, как показано на рисунке 13. Определите максимальный ток в катушке индуктивностью $L_1$.

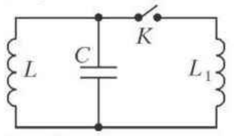

Рис. 13

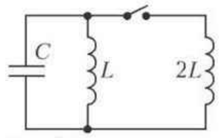

Рис. 14

**4** (Академия ФСБ, 2002). Колебательный контур состоит из параллельно соединенных конденсатора емкостью $C$ и катушки индуктивностью $L$. В тот момент, когда заряд конденсатора равен $q$, а ток катушки равен $I$, параллельно подключают еще одну катушку индуктивностью $2L$ (рис.14). Найдите максимальный заряд конденсатора после такого подключения. Элементы цепи считайте идеальными. Взаимной индуктивностью катушек можно пренебречь.

**5** (ЕГЭ). В электрической цепи, показанной на рисунке 15, ЭДС и внутреннее сопротивление источника тока равны 12 В и 1 Ом соответственно, емкость конденсатора 2 мФ, индуктивность катушки 36 мГн и сопротивление лампы 5 Ом. В начальный момент времени ключ $K$ замкнут. Какая энергия выделится в лампе после размыкания ключа? Сопротивлением катушки и проводов пренебречь.

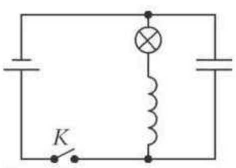

Рис. 15

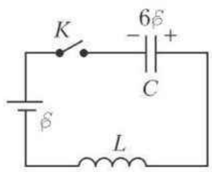

Рис. 16

**6** (МФТИ, 2002). В схеме, изображенной на рисунке 16, при разомкнутом ключе $K$ напряжение на конденсаторе емкостью $C$ равно $6\mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ – ЭДС батареи. Какой максимальный ток будет течь через катушку индуктивностью $L$ после замыкания ключа? Внутренним сопротивлением батареи и сопротивлением катушки пренебречь.

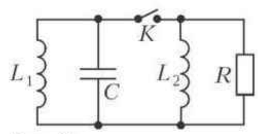

Рис. 17

**7** (МФТИ, 2004). В $LC$-контуре (рис.17) при разомкнутом ключе $K$ происходят колебания. В тот момент, когда ток в контуре достигает максимального значения $I_m$, замыкают ключ. Считая заданными $I_m$, $L_1$ и $L_2$, определите полное количество теплоты, которое выделится в резисторе сопротивлением $R$ пос-

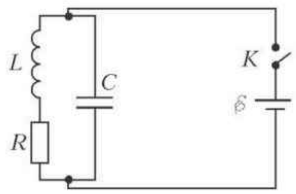

Рис. 18

(Продолжение см. на с. 81)

ных математикой, физикой, информатикой, химией или биологией.

1) *Заочная школа для учащихся 8 и 9 классов*. Обучение в заочной школе бесплатное. Отбор – конкурсный. Большинство материалов заочной школы находится в открытом доступе на официальном сайте СУНЦ МГУ. Но только учащиеся заочной школы имеют возможность общения через интернет с преподавателями заочной школы и в случае успешного освоения программы обучения могут быть приглашены на очную сессию.

2) *Летняя школа для учащихся 8 – 10 классов*. В 2015 году Летнюю школу планируется провести по следующим специализациям:

- естественно-научная (физика, математика, информатика, химия и биология) для учащихся 8 классов;
- физико-математическая (для учащихся 9 и 10 классов);
- химическая (только для учащихся 9 классов);
- биологическая (только для учащихся 9 классов).

Летние школы традиционно проводятся в период с начала июня по начало июля. Продолжительность каждой школы около двух недель. Точные сроки проведения Летних школ планируется объявить в начале мая 2015 года. В рамках Летней школы школьники 9 и 10 классов будут иметь возможность сдать вступительные экзамены в классы соответствующей специализации СУНЦ МГУ. Ученики 9 класса, желающие поступить в компьютерно-информационный класс СУНЦ МГУ, должны пройти обучение в Летней школе по физико-математической специализации.

3) *Турнир юных физиков*. Это лично-командное состязание старшеклассников в умении решать сложные исследовательские и научные проблемы, убедительно представлять свои решения, отстаивать их в научных дискуссиях и критически анализировать результаты других докладчиков.

4) *Колмогоровские чтения*. Это научная конференция школьников, традиционно проходящая в начале мая в Специализированном учебно-научном центре МГУ. В конференции принимают участие различные факультеты МГУ, Российская академия наук, Российская академия образования. Конференция проводится для учащихся старших классов с их научными руководителями и разделяется на несколько секций.

5) *Различные олимпиады*. Это интернет-олимпиада, Олимпиадные сборы, Турнир «Математическое многоборье» и другие.

Отбор участников всех проектов происходит бесплатно на конкурсной основе. Обучение, питание и проживание школьников, приглашенных в Летнюю школу СУНЦ МГУ, для выпускников 9 и 10 классов, а также обучение в Заочной школе СУНЦ МГУ и участие в Интернет-олимпиаде СУНЦ МГУ бесплатны. Участники научной конференции школьников «Колмогоровские чтения», Турнира «Математическое многоборье», Турнира юных физиков, Олимпиадных сборов и Летней школы для выпускников 8 классов оплачивают небольшой организационный взнос.

Подробное описание образовательных проектов и условия конкурсного отбора участников размещены на официальном сайте СУНЦ МГУ: www.internat.msu.ru в разделе «Образовательные проекты». Здесь можно также оставить заявку на участие в проектах.

## Задача о фруктовом саде

*(Начало см. на с. 52)*

Более того, последнее рассуждение показывает, что наш луч $h$ будет заслонен даже при $r = 1/l$, если он не совпадает с лучом $OW$ или если $h$ совпадает с $OW$, но $w > l$. Поэтому остается рассмотреть лишь случай, когда $h$ проходит через точку $L$ с взаимно простыми координатами $(a, b)$, находящуюся на расстоянии $OL = l$ от начала координат.

Рассмотрим произвольную целую точку $M(x, y)$ в первом квадранте. Она не лежит внутри отрезка $OL$, иначе мы имели бы $y/x = b/a$, или $ay = bx$, и поскольку $a$ и $b$ взаимно просты, то $x$ и $y$ должны делиться на $a$ и $b$ соответственно. Но тогда $x \geq a$, $y \geq b$ и $OM \geq OL$, что невозможно. Теперь предположим, что $O$, $M$, $L$ являются вершинами треугольника. Найдем в этом треугольнике целую точку $N$, ближайшую к прямой $OL$. Тогда площадь треугольника $OLN$ равна $1/2$ (это доказывается так же, как и для треугольника $OUV$ выше). Таким образом, площадь треугольника $OLM$ не меньше $1/2$, и расстояние от $M$ до $OL$ не меньше чем $1/l$.

Тем самым мы доказали, что *ни одно из деревьев не заслоняет луч $OL$*, что завершает доказательство нашего общего утверждения.

## Колебательный контур и законы сохранения

*(Начало см. на с. 56)*

ле замыкания ключа. Омическое сопротивление катушек считать равным нулю.

**8** (МФТИ, 1979). Колебательный контур, состоящий из конденсатора емкостью $C$ и катушки индуктивностью $L$ и омическим сопротивлением $R$, через ключ $K$ подключен к источнику постоянной ЭДС $\mathcal{E}$ (рис.18). Через некоторое время после замыкания ключа установится стационарный режим: токи во всех цепях будут постоянны. После этого ключ снова размыкается. Определите, какое количество теплоты выделится в катушке после размыкания.

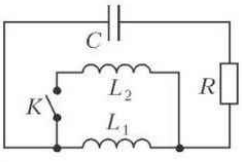


Рис. 19

**9** (МФТИ, 2004). В $LC$-контуре (рис.19) при разомкнутом ключе $K$ происходят колебания. В тот момент, когда напряжение на конденсаторе равно $U_0$, а ток через катушку $L_1$ равен $I_0$, замыкают ключ $K$. Считая заданными $U_0$, $I_0$, $L_1$, $L_2$ и $C$, определите полное количество теплоты, которое выделилось в резисторе $R$ после замыкания ключа. Омическое сопротивление катушек считайте равным нулю.

**10** (Всероссийская олимпиада школьников по физике, 1999). Электрическая цепь состоит из источника ЭДС $\mathcal{E}$, резистора сопротивлением $R$, сверхпроводящих катушек индуктивностями $L_1$ и $L_2$, конденсатора емкостью $C$ и ключей $K_1$ и $K_2$ (рис.20). Ключ $K_1$ замыкают. После достижения в цепи установившегося режима замыкают ключ $K_2$ и тут же размыкают ключ $K_1$. Найдите: 1) силу тока, протекающего через катушку индуктивностью $L_1$ в установившемся режиме после замыкания ключа $K_1$; 2) максимальное напряжение на конденсаторе после размыкания ключа $K_1$. Внутренним сопротивлением источника тока, сопротивлениями соединительных проводов и контактов в ключах можно пренебречь.

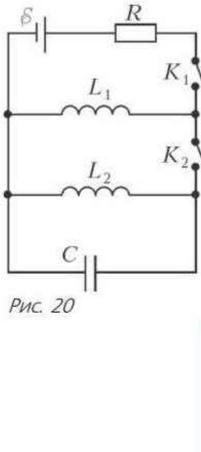


Рис. 20

**4.** Работа силы трения на каждом маленьком участке $\Delta s$ равна $\Delta A = -F_{\text{тр}}\Delta s$ , а сама сила трения равна

$$F_{\text{тр}} = \mu mg\left(\cos\alpha - \frac{v^2}{Rg}\right),$$

где $R$ – радиус кривизны траектории. Поэтому в общем случае, для того чтобы работа силы трения при подъеме была равна работе силы трения при спуске, необходимо, чтобы скорости тела на одном и том же участке при спуске и при подъеме были одинаковыми. Впрочем, всех этих сложностей можно избежать, если представлять горку в таких задачах прямой ( $R = \infty$ ) с небольшим покрытым льдом ( $\mu = 0$ ) переходным участком от наклонной части траектории к горизонтальной.

### Задачи

**5.** На рисунке 8 приводится таблица «Физического судоку», заполненная с использованием неизвестной $A_x$ . Коэффициент полезного действия связывает клетки таблицы следующим образом:

| | $Q =$ | $\Delta U\ +$ | $A_{\text{г}}$ |
|---|---|---|---|
| 1–2 | $0$ 7 | $-\frac{3}{2}A_1$ 9 | $\frac{3}{2}A_1$ 10 |
| 2–3 | $-A_x$ 6 | $0$ 5 | $-A_x$ 4 |
| 3–1 | $\frac{5}{2}A_1$ 3 | $\frac{3}{2}A_1$ 2 | $A_1$ 1 |
| $\Sigma$ | | $0$ 8 | $\frac{5}{2}A_1 - A_x$ 11 |

Рис. 8

$$\eta = \frac{A_{\text{общ}}}{Q_{\text{пол}}} = \frac{(5/2)A_1 - A_x}{(5/2)A_1},$$

откуда следует ответ:

$$A_x = (1-\eta)\cdot\frac{5}{2}A_1 = 1200 \text{ Дж}.$$

**7.** На рисунке 9 приводится заполненная таблица. Ответ имеет вид

$$A = 2mgh = \frac{mv^2}{2} = 460 \text{ Дж}.$$

| | $A_{\text{внеш}}\ +$ | $A_{\text{тр}} =$ | $\Delta E$ |
|---|---|---|---|
| 1–2 | $0$ 1 | $-210$ 3 | $-210$ 2 |
| 2–1 | $460$ 6 | $-210$ 4 | $250$ 5 |

Рис. 9

## КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР И ЗАКОНЫ СОХРАНЕНИЯ

**1.** $q = 2$ нКл. **2.** $L = \left(\frac{q}{I_0(C_1 - C_2)}\right)^2 C_1$. **3.** $I_{1m} = \frac{2LI_m}{L + L_1}$.

**4.** $q_m = \sqrt{q^2 + \frac{2LCI^2}{3}}$. **5.** $Q = 115$ мДж. **6.** $I_m = 7\mathcal{E}\sqrt{\frac{C}{L}}$.

**7.** $Q = \frac{L_1L_2I_m^2}{2(L_1 + L_2)}$. **8.** $Q = \frac{\mathcal{E}^2}{2}\left(C + \frac{L}{R^2}\right)$.

**9.** $Q = \frac{CU_0^2}{2} + \frac{L_1L_2I_0^2}{2(L_1 + L_2)}$.

**10.** 1) $I = \frac{\mathcal{E}}{R}$; 2) $U_m = \frac{\mathcal{E}}{R}\sqrt{\frac{L_1L_2}{C(L_1 + L_2)}}$.

## ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XL ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

*9 класс*

**1.** Пусть ни одно из чисел не делится на 3. Тогда каждое число дает остаток 1 или 2 при делении на 3. Но числа, дающие одинаковые ненулевые остатки при делении на 3, не могут отличаться на 1 или на 2; не могут они отличаться и в два раза. Значит, соседние числа дают различные остатки при делении на 3, т.е. остатки 1 и 2 чередуются. Но тогда общее количество чисел должно быть четным, что не так. Противоречие.

**2.** Два.

Заметим, что никакие два квадрата натуральных чисел не отличаются на 1, ибо $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$ , где вторая скобка больше единицы. Значит, числа $a(a+2) = (a+1)^2 - 1$ и $b(b+2) = (b+1)^2 - 1$ квадратами не являются. Более того, числа $ab$ и $a(b+2)$ не могут одновременно являться квадратами, иначе их произведение $a^2 b(b+2)$ также было бы квадратом, а тогда и число $b(b+2)$ – тоже. Аналогично, из чисел $(a+2)b$ и $(a+2)(b+2)$ максимум одно может быть квадратом. Итого, квадратов на доске не больше двух.

Два квадрата могут получиться, например, при $a = 2$ и $b = 16$: тогда $a(b+2) = 6^2$ и $(a+2)b = 8^2$.

**3.** $n - 2$ при четных $n$, $n - 3$ при нечетных $n$.

Мы будем пользоваться следующей известной леммой.

**Лемма**. *В выпуклом n-угольнике нельзя провести более n – 3 диагоналей, не имеющих общих внутренних точек.*

Сначала докажем индукцией по $n$, что количество хороших диагоналей не превосходит $n - 2$, если $n$ четно, и $n - 3$, если $n$ нечетно. При этом мы будем считать, что отрезок является 2-угольником без диагоналей. При $n = 2$, 3 утверждение очевидно. Пусть $n \geq 4$ ; обозначим наш многоугольник через $P = A_1A_2\ldots A_n$ .

Если никакие две хорошие диагонали не пересекаются, то по лемме их количество не превосходит $n - 3$. Пусть теперь найдутся две пересекающихся хорошие диагонали $A_iA_k$ и $A_jA_l$ $(i < j < k < l)$. Тогда каждая из них не пересекается с другими проведенными диагоналями. Выбросим $A_iA_k$ и $A_jA_l$ из рассмотрения. Каждая оставшаяся проведенная диагональ $d$ является диагональю или стороной ровно в одном из многоугольников $Q_1 = A_i\ldots A_j$ , $Q_2 = A_j\ldots A_k$ , $Q_3 = A_k\ldots A_l$ или $Q_4 = A_l\ldots A_nA_1\ldots A_i$ (рис.10). При этом если $d$ является стороной одного из них, то она не может пересекаться с другими диагоналями (и не является хорошей).

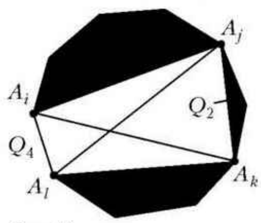

Рис. 10

Пусть $n$ четно. По предположению индукции, среди всех диагоналей, попавших в какой-то многоугольник $Q_s$ , хороших не больше, чем количество вершин в нем, уменьшенное на 2. Значит, общее количество хороших диагоналей в $P$ не превосходит

$$2 + (j-i-1) + (k-j-1) + (l-k-1) + (n-l+i-1) = n-2, \quad (*)$$

что и требовалось.

При нечетном $n$ сумма количеств вершин в многоугольниках $Q_1$, $Q_2$, $Q_3$, $Q_4$ равна нечетному числу $n + 4$; значит, число вершин в одном из них нечетно. А тогда соответствующее слагаемое в сумме ( $*$ ) уменьшится на 1, и мы получим, что общее число хороших диагоналей не превосходит $n - 3$. Переход индукции завершен.

Осталось привести примеры, показывающие точность оценки. При четном $n$ достаточно провести в многоугольнике $A_1\ldots A_n$