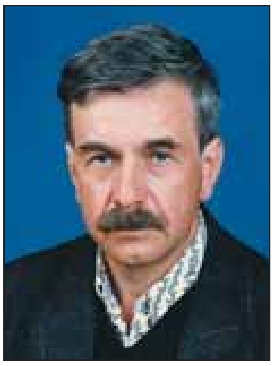

Рыбаков Александр Борисович
Кандидат физико-математических наук.
Учитель физики гимназии № 144 г. Санкт-Петербурга.

«Подводные камни» в одном простом сюжете

Задачи о скатывании санок с горки есть в любом школьном задачнике. Казалось бы, что может быть проще. Но мы покажем, что и в этих простых задачах есть тонкие моменты, на которые обычно не обращают внимания.

1. Введение

Мы рассмотрим задачи о расчёте движения тел (будем для определённости говорить о санках), скатывающихся с горки. Такого рода задачи можно найти чуть ли не в каждом задачнике, ориентированном на школьников (но встречаются они и в вузовских задачниках).

Подчеркнём, что профиль горки в условии задачи обычно не уточняется, т.е. авторы считают, что задачи можно решить для горки произвольного профиля. Конечно, речь идёт о профиле без изломов, плавно переходящем в горизонтальный участок (иногда, правда, указывается, что склон горки представляет собой наклонную плоскость – это мы обсудим отдельно).

Решение таких задач всегда опирается на интересное свойство сил трения, которое проявляется при движении тела по наклонной плоскости: *при заданных коэффициенте трения и массе тела работа сил трения зависит только от величины горизонтальной проекции пройденного участка плоскости*. Покажем это.

Найдём работу сил трения на участке плоскости CD длиной ΔS (рис. 1). Будем считать, что сила тре-

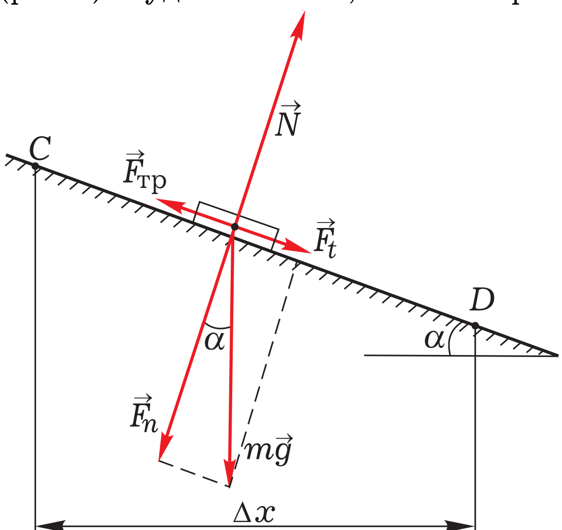

Рис. 1

ния скольжения не зависит от скорости. Разложим силу тяжести, действующую на санки, на две составляющие, направленные вдоль наклонной плоскости и по нормали к ней.

Санки прижимаются к плоскости нормальной составляющей силы тяжести:

$$N = F_n = mg\cos\alpha, \qquad (1)$$

поэтому работа сил трения на этом участке равна

$$A_{\text{тр}} = -F_{\text{тр}}\Delta S =$$
$$= -\mu\, mg\cos\alpha\,\Delta S = -\mu\, mg\Delta x, \qquad (2)$$

где μ – коэффициент трения, α – угол наклона плоскости к горизонту.

Мы видим, что работа сил трения зависит только от величины горизонтальной проекции Δx пройденного участка плоскости (ну и, конечно, от коэффициента трения и массы тела). Заметим, что эта работа не зависит от направления движения.

Именно этим свойством сил трения и пользуются авторы задачников, разбивая мысленно произвольный профиль горки на множество наклонных плоскостей. Но насколько корректно они им пользуются?

2. Две задачи

Приведём две задачи, которые, скорее всего, известны читателям. Вероятно, известны и решения задач. Вспомните эти решения и попробуйте отнестись к ним критически.

Задача 1. Санки массы m съезжают с горки высотой h и останавливаются на расстоянии Δx по горизонтали от вершины горки (рис. 2). Найти коэффициент трения.

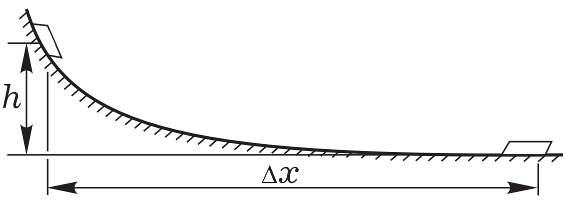

Рис. 2

Задача 2. Санки массы m съезжают с горки высотой h и останавливаются. Какую работу A надо совершить, чтобы втащить санки с места остановки по тому же пути обратно?

Мы привели условие второй задачи в том виде, в каком она обычно встречается в задачниках. Заметим, что в условие следовало бы вставить указание на то, что при втаскивании санок наверх сила прикладывается вдоль поверхности.

По сути дела, эти две задачи на один сюжет, и мы можем обсуждать их совместно. Сначала воспроизведём ход рассуждений авторов.

Ясно, что санки остановятся тогда, когда вся потенциальная энергия санок, которой они обладали на вершине горки, израсходуется на работу против сил трения, и, опираясь на сформулированное выше свойство силы трения, можно написать

$$mgh = \mu mg\Delta x. \qquad (3)$$

Тогда ответом первой задачи будет

$$\mu = \frac{h}{\Delta x}. \qquad (4)$$

При решении второй задачи авторы считают, что на пути наверх будет совершена такая же работа против сил трения, как на пути вниз, и, кроме того, работа против сил тяжести, поэтому полная работа

$$A = mgh + \left|A_{\text{тр}}\right| = 2mgh. \qquad (5)$$

Полученные ответы (4) и (5) обеих задач неверные. Какую же ошибку совершают авторы приведённых выше решений?

Они считают, что сформулированное выше свойство сил трения на наклонной плоскости сохраняется на любой поверхности. Но это не так.

Наверно (мы можем только догадываться), их сбил с толку известный приём, когда кривая линия заменяется ломаной, сколь угодно близкой к этой кривой. И они считают, что поскольку на каждом участке ломаной имеет место сформулированное выше свойство силы трения, то значит, оно имеет место и на кривой. Но это неправильная логика.

Представьте себе, что мы заменили бы окружность правильным многоугольником с большим (очень большим!) числом сторон, а потом заявили бы, что поскольку при движении по сторонам многоугольника центростремительное ускорение $a_{цс}$ равно нулю, то, значит, и при движении по окружности $a_{цс}=0$ (?!). В этом примере нелепость рассуждений бросается в глаза – но именно такая ошибка и совершается обычно при решении задач 1 и 2. Отложим пока детальное обсуждение движения санок.

3. Ах, какая красивая задача!

Замечательная задача, развивающая этот сюжет, предлагалась когда-то на городском туре олимпиады в Петербурге (впрочем, тогда ещё – в Ленинграде). Для удобства рассуждений мы разбили её на две задачи.

Задача 3. Мальчик садится на санки в точке A (рис. 3) и съезжает с горки. Санки останавливаются в точке B. Определить коэффициент трения санок о снег.

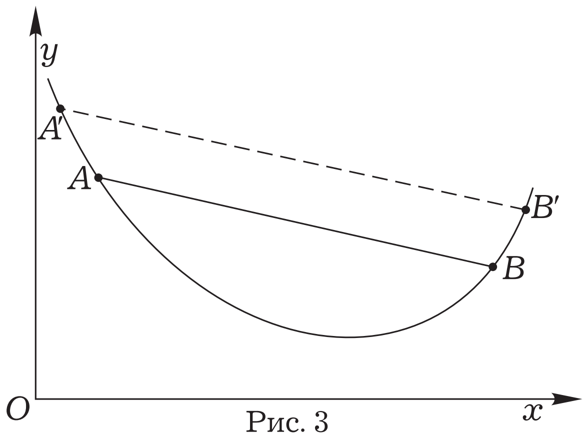

Рис. 3

Задачу предлагалось решать графически – на рисунке был приведён масштаб по осям Ox и Oy (на отрезок $A'B'$ пока не обращайте внимания).

Вот авторское решение (оно было опубликовано).

Опираясь на сформулированное выше свойство работы сил трения, авторы записывали закон сохранения энергии для санок в следующем виде:

$$mg\Delta y=\mu mg\Delta x, \qquad (6)$$

где Δy – перепад высот между точками A и B, а Δx – расстояние между ними по горизонтали. Тогда коэффициент трения

$$\mu=\frac{\Delta y}{\Delta x}. \qquad (7)$$

Конечно, эти формулы лишь обозначениями отличаются от формул (3), (4). Итак, авторы считали, что отрезок AB, связывающий точку старта и точку остановки санок, всегда наклонен к горизонту под таким углом α, что

$$\mu=\operatorname{tg}\alpha. \qquad (8)$$

Задача 4 *(продолжение задачи 3).* Где остановятся санки, если мальчик начнёт съезжать из какой-то другой точки A'?

Авторы, конечно, на основании изложенных выше рассуждений проводили через точку A' прямую, параллельную отрезку AB. Точка, в которой эта прямая пересекала противоположный склон горы, и есть искомая точка B', считали авторы. Но мы уже понимаем, что эти рассуждения неправильны, нельзя было к криволинейной горке применять результаты, полученные на наклонной плоскости. А жалко. Какая была красивая задача!

4. Как же надо было рассуждать?

На криволинейной траектории уравнение 2-го закона Ньютона в проекции на нормаль к траектории принимает вид

$$N - mg\cos\alpha = m\,a_{\text{цс}}. \qquad (9)$$

Здесь $a_{\text{цс}}$ – центростремительное ускорение, N – сила, действующая на санки со стороны горки по нормали, α – угол наклона профиля горки в данной точке (т.е. угол между касательной к профилю горки и горизонталью). Для выпуклой горки

$$N = mg\cos\alpha - \frac{mv^2}{R}, \qquad (10)$$

а для вогнутой

$$N = mg\cos\alpha + \frac{mv^2}{R}, \qquad (11)$$

где R – радиус кривизны траектории в данной точке, v – скорость санок.

Коэффициент трения не зависит от скорости, но сила нормального давления санок на горку, а следовательно, и работа сил трения на каком-то участке горки, зависят от скорости, с которой санки проходят этот участок! Вот это обстоятельство и не учитывали авторы приведённых выше задач.

Поясним сказанное рисунком. На рисунке 4 приведены участки горок разного профиля с одинаковой горизонтальной проекцией. Как уже сказано, при движении тела по участкам 1, 2 и 3 работы сил трения одинаковы и не зависят от того, в какую сторону и как именно движется тело. Обозначим эту работу A_0. Работы сил трения на участках 4 и 5 зависят от скорости движения тела, причём работа на вогнутом участке 4 всегда (по модулю) больше A_0, а на выпуклом участке 5 – меньше A_0.

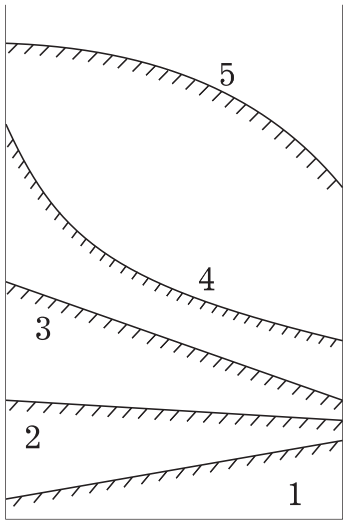

Рис. 4

Если бы санки двигались без трения, то их скорость не зависела бы от профиля горки (а зависела бы только от перепада высот). При свободном движении вниз при наличии трения санки на выпуклом участке всегда наберут большую скорость, чем на вогнутом (при одинаковом перепаде высот).

Это обстоятельство разрушает все приведённые выше авторские решения задач 1-4 (впрочем, решения задач 1 и 2 ещё можно «спасти» – см. ниже).

Так, в задаче 2, поскольку санки будут двигаться наверх не с той скоростью, с которой они скатывались вниз, работы сил трения на пути вверх и на пути вниз будут отличаться.

Теперь мы понимаем, что в общем случае (т.е. для горки произвольного профиля) расчёт движения санок очень сложен.

В то же время интуитивно ясно, что если кривизна горки мала, то и отличие от «стандартного» решения будет невелико. Можно ли придать этому условию более строгий вид?

Проведём оценку отношения членов в уравнении (9).

$$\frac{\frac{mv^2}{R}}{mg\cos\alpha} \sim \frac{v^2}{gR} < \frac{2gh}{gR} = \frac{2h}{R}, \qquad (12)$$

где знак «~» обозначает равенство по порядку величины.

Эти оценки показывают, что если кривизна горки мала, т.е. радиус кривизны R велик по сравнению с высотой горки, то в (9) можно пренебречь членом $ma_{\text{цс}}$ и тем самым «спасти» приведённые выше решения задач 1 и 2. Надо только добавить соотношение $R \gg h$ в условие задач (что и сделано в одном известном задачнике). Увы, спасти решения задач 3 и 4 не удаётся (там профиль горы задан и не удовлетворяет этому соотношению).

Эти рассуждения выглядят весьма чужеродными для школьного курса, но в действительности очень характерны для физики. Именно на основании оценок относительной роли разных членов в уравнениях (т.е. относительной роли разных эффектов в каком-то явлении) и строится всегда модель явления.

5. А мы поедем с наклонной плоскости!

Ну что ж, скажет читатель, если анализ движения по горкам с криволинейным профилем таит в себе такие опасности, не будем вообще с ними связываться. Обойдём все эти сложности, будем рассматривать горки – наклонные плоскости. Увы, обойти сложности не удастся – ведь при переходе с наклонной плоскости на горизонтальный участок санки неизбежно испытают удар! Приходит мысль – а что, если осуществить плавное сочленение профилей по дуге окружности? Если участок сочленения весьма мал, то и потерей скорости на этом участке, наверно, можно будет пренебречь.

Проанализируем движение санок на участке сочленения. Радиус кривизны этого участка обозначим R (рис. 5). Центр соответствующей окружности – точка O. Пусть санки подходят к участку со скоростью v_0. С какой скоростью v они выйдут на горизонтальный участок?

Изменение кинетической энергии санок обусловлено работой сил трения и сил тяжести:

$$\Delta E_{\text{кин}} = A_{\text{тяж}} + A_{\text{тр}}. \qquad (13)$$

Сделаем теперь естественное предположение, что радиус кривизны траектории на этом участке весьма мал, и в частности, $v_0^2 \gg gR$. Тогда можно пренебречь членом $A_{\text{тяж}}$ в уравнении (13) и членом с нормальной составляющей силы тяжести в уравнении (9).

На рисунке радиусы OA и OB проведены в точки сочленения с плоскими участками, легко видеть, что угол между ними равен углу наклона плоскости к горизонту α. В качестве переменной при движении санок по закруглению будем рассматривать угол φ, отсчитываемый от OA. При движении санок этот угол изменяется от 0 до α. Увы, без интегралов нам здесь не обойтись. Хотя приводимый ниже расчёт вполне доступен 11-классникам, всё же читатель, не желающий утруждать себя интегралами, может поверить нам и обратиться прямо к результату (17).

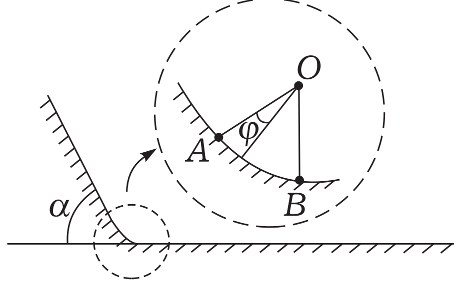

Рис. 5

Итак, для движения по бесконечно малому участку длиной $ds = Rd\varphi$ уравнение (13) принимает вид

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = -\mu N ds, \qquad (14)$$

или

$$mvdv = -\mu\frac{mv^2}{R}R\,d\varphi. \qquad (15)$$

Отсюда

$$\frac{dv}{v} = -\mu\,d\varphi. \qquad (16)$$

Интегрируя от $\varphi = 0$ до $\varphi = \alpha$, получаем, что на горизонтальную поверхность санки выйдут со скоростью

$$v = v_0 e^{-\mu\alpha}. \qquad (17)$$

В приведённом расчёте углы, конечно, измеряются в радианах. Интересно (и очень удобно), что в ответ не вошел радиус закругления.

Насколько же существенно падение скорости на этом участке? Сделаем оценки.

При малых x имеем $e^{-x} = 1 - x$ (читатели, незнакомые с таким ходом рассуждений, могут, конечно, проверить это прямым вычислением). Поэтому при $\mu\alpha << 1$

$$v = v_0(1 - \mu\alpha). \qquad (18)$$

Справочник[1] даёт для коэффициента трения полозьев, обитых железом, по льду значение 0,02, т.е. условие малости $\mu\alpha$ выполняется. Тогда для горки с углом наклона вблизи 45° имеем

$$v = v_0(1 - 0{,}02\pi/4) \approx 0{,}984 v_0.$$

Поскольку длина пути санок по горизонтальному участку пропорциональна v^2, то обычное решение, не учитывающее потерю скорости на этом участке, справедливо с точностью около 3%. Такая точность нас обычно вполне устраивает в учебных задачах.

Но в общем случае, когда коэффициент трения не столь мал, необходимо учитывать потерю скорости даже на малом участке закругления пути.

Заметим напоследок, что пафос наших заметок, конечно, не в том, чтобы упрекнуть авторов задач. Мы лишь хотели показать, что и в самых простых, на первый взгляд, задачах могут быть «подводные камни».

[1] Н.И. Кошкин, М.Г. Ширкевич. Справочник по элементарной физике. – М.: 1980.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Цена радости

Тенор, ставший любимцем местной публики, перед окончанием сезона предупредил директора оперного театра:

– В следующем сезоне я буду петь у вас только в том случае, если дирекция согласится заплатить мне 30 тысяч гульденов за восемь месяцев.

– Помилуйте! – воскликнул директор. – Ведь 32 тысячи в год получает наш премьер-министр…

– Не думаю, чтобы он радовал публику больше, чем я, – парировал певец.

Из собрания С.А. Тихомировой