Опять «2»!

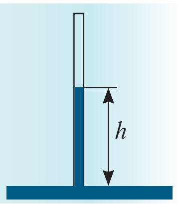
Показано, что в самых разных задачах из школьного курса можно обнаружить удивительно простое соотношения между разными слагаемыми в балансе энергии.

КЛЮЧЕВЫЕ СЛОВА: баланс энергии, капилляр, зарядка конденсатора, наклонная плоскость

А.А. ЗАЙЦЕВ
aazay2013@mail.ru,
г. Москва

Заглавие наших заметок, которое можно прочесть и как «Опять двойка!», наверняка, вызовет у старшего поколения вполне определённые ассоциации – это, конечно, знаменитая картина Ф.П. Решетникова, шедевр (без всякой иронии!) социалистического реализма из Третьяковской галереи.

Но мы-то собираемся говорить о другом. Часто кто-то из коллег хочет обратить наше внимание на серию задач, объединённых по какому-то принципу – по тематике, по уровню сложности... Предлагаемые ниже задачи объединены совсем другим. Автор хочет поделиться тем удивлением, которое он сам испытал, обнаружив, что соотношение между слагаемыми в балансе энергии в самых разных ситуациях сводится к множителю 2. Вот два примера, где анализ энергетического баланса совсем прост.



1. Опустим конец узенькой трубочки (капилляра) в смачивающую жидкость. Жидкость в капилляре под действием вертикальной составляющей силы поверхностного натяжения $F_{пн}$ поднимется относительно уровня жидкости в сосуде.

Баланс энергии выглядит так: работа силы натяжения идёт на увеличение потенциальной энергии столба жидкости, а какая-то её часть переходит в тепло.

Заметим, что при подъёме жидкости сила $\vec{F}_{пн}$ была приложена на пути h, то есть совершила работу $A_{пн} = h \cdot F_{пн}$, а центр тяжести столба поднялся на высоту $h/2$, то есть потенциальная энергия жидкости увеличилась на $\Delta E_{пот} = mgh/2$ (m – масса столбика жидкости в капилляре). Выделившееся при этом количество теплоты обозначим Q. Итак:

$$A_{пн} = \Delta E_{пот} + Q \Rightarrow F_{пн} \cdot h = mgh/2 + Q. \qquad (1)$$

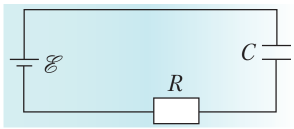
Ясно, что в равновесии вертикальная составляющая сила поверхностного натяжения $F_{пн}$ уравновешивает силу тяжести, действующую на столб жидкости:

$$F_{пн} = mg,$$

поэтому между слагаемыми в балансе энергии (1) имеем следующие соотношения: $\dfrac{A_{пн}}{\Delta E_{пот}} = \dfrac{A_{пн}}{Q} = 2.$

Вот эту-то «2» мы имели в виду в названии наших заметок.

2. К концу свободно висящей пружины подвешивают груз и отпускают его. Ясно, что в положении равновесия удлинение пружины x будет таким, что $kx = mg$ (все обозначения стандартные). То есть сила тяжести совершила над этой системой работу mgx, но энергия, запасённая в растянутой пружине, равна $kx^2/2 = mgx/2$. Снова констатируем, что половина работы внешней силы «пропала», то есть перешла в тепло. Опять «2»!



3. Теперь проанализируем превращения энергии, происходящие при в простейшей электрической цепи при зарядке конденсатора. Подсоединим незаряженный конденсатор ёмкостью C к батарее с ЭДС $\mathscr{E}$. Со временем в системе установится равновесие, при этом конденсатор зарядится до напряжения $U = \mathscr{E}$, на его обкладках будет заряд $Q = CU$, запасённая в конденсаторе энергия равна

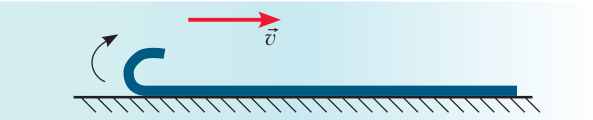
$$W = \frac{QU}{2} = \frac{Q\mathscr{E}}{2}.$$

Но при прохождении через источник тока заряда Q сторонние силы совершат работу $Q \cdot \mathscr{E}$, то есть в два раза большую, чем энергия, запасённая в конденсаторе. Куда же девалась другая половина работы сторонних сил? Ответ очевиден – выделилась в виде тепла в проводах. Опять «2»!

4. Если кому-то эти результаты кажутся слишком простыми и потому не очень-то интересными, то взглянем на них «с другой стороны». Заметим, что детали прохождения тока в примере 3 или колебаний грузика перед установлением равновесия в примере 2 нам неизвестны. Может даже показаться, что при уменьшении сил сопротивления потери уменьшатся, но это не так – диссипативные процессы перестроятся таким образом, чтобы потери энергии составляли именно половину работы «внешних сил». Если грузику во втором примере придать обтекаемую форму, чтобы уменьшить силу сопротивления воздуха, то он совершит большее число колебаний, прежде чем успокоится, но потери энергии

останутся теми же. Если уменьшить сопротивление проводов в примере 3, то сила тока в проводах увеличится, а характерное время зарядки уменьшится, но потери энергии окажутся теми же. Если попробовать рассчитать потери энергии по закону Джоуля–Ленца: $Q = \int_0^\infty i^2 R dt$, то мощь энергетического подхода станет очевидной.

5. Следующий пример немного сложнее. Длинная тяжёлая нить (канат, ковровая дорожка) лежит на полу. Её конец загибают и тянут назад с постоянной скоростью $\vec{v}$.



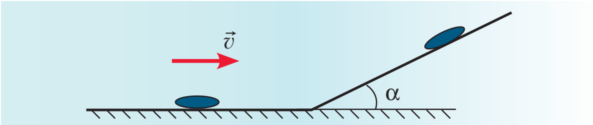
На первый взгляд кажется, что нам ничто не мешает считать нить в некотором смысле идеальной и пренебрегать потерями энергии на её деформацию. Но, проанализировав превращения энергии в этом движении, мы покажем, что это не так. Прежде всего, необходимо понять, почему надо всё время прикладывать силу, – ведь часть нити движется с постоянной скоростью. Дело в том, что всё время новые части нити включаются в движение, то есть меняется их импульс, вот это-то изменение импульса и обусловливает сила, приложенная к концу нити.

Пусть длина нити L, а её масса M, то есть масса единицы длины нити $\rho = M/L$. Когда конец нити, к которому приложена сила, совпадёт с неподвижным концом (то есть нить сложится вдвое), движущийся конец пройдёт путь L, а точка перегиба – путь $L/2$ (значит, она движется со скоростью $v/2$). То есть за время Δt в движение вовлекается участок ковра длиной $\Delta l = v\Delta t/2$ и массой $\Delta m = v\rho\Delta t/2$. Следовательно, скорость изменения импульса движущейся части дорожки, то есть действующая на неё сила, равна (по модулю) $F = \frac{\rho v^2}{2}$.

К тому моменту, когда концы совпадут, эта сила совершит работу $A = F \cdot L = \frac{\rho v^2}{2} L = \frac{Mv^2}{2}$. Но кинетическая энергия движущейся части (то есть половины) нити в два раза меньше: $E_к = \frac{M}{2} \cdot \frac{v^2}{2} = \frac{1}{2} A$.

Если вдуматься, это – удивительный результат. Во-первых, мы опять получили, что ровно половина работы внешней силы «потеряна», то есть пошла в тепло при деформации нити. Опять «2»! Но важен и качественный результат: в массивных гибких связях при движении точки перегиба мы обязательно теряем заметную часть механической энергии. В наших же школьных задачах нити всегда предполагаются невесомыми и об этом эффекте можно не думать.

6. Обратимся к традиционной теме школьного курса – задачам на движение по наклонной плоскости. Напомним, что среди всевозможных значений углов наклона плоскости есть один «замечательный угол» α_0, обладающий таким свойством: если угол наклона плоскости $\alpha < \alpha_0$, то положенное на плоскость тело не будет скользить вниз, если же $\alpha > \alpha_0$, тело будет соскальзывать. Несложно доказать, что $\mathrm{tg}\alpha_0 = \mu$, где μ – коэффициент трения.



Рассмотрим такую ситуацию (см. рис.): груз скользит по горизонтали и переходит на плоскость с углом наклона α_0. Какая часть начальной кинетической энергии перейдёт в тепло при движении груза до верхней точки?

На участке наклонной плоскости длиной s работа сил трения равна $A_{тр} = \mu mgs \cdot \cos\alpha_0$, а изменение потенциальной энергии тел $\Delta U = mgs \cdot \sin\alpha_0$.

К верхней точке подъёма вся начальная кинетическая энергия перейдёт в тепло (из-за трения) и потенциальную энергию тела. А поскольку $\mathrm{tg}\alpha_0 = \mu$, эти величины равны. Итак, именно половина начальной энергии пошла на подъём тела, а половина перешла в тепло. Опять «2»! Но, пожалуй, красотой и общностью примеров, рассмотренных выше, эта задача не обладает.

7. В заключение заметим, что, например, в примере с нитью для нас не осталось тёмных мест – мы можем ответить на любой вопрос. Наоборот, в примере с зарядкой конденсатора мы ничего не узнали о деталях токопрохождения. Обратим внимание на это важное обстоятельство – баланс энергии может быть установлен из самых общих соображений, без рассмотрения теории процесса.

Скажем ещё, что затронутые здесь вопросы можно развивать в разных направлениях. Например, было бы интересно узнать, сохранится ли отмеченное нами соотношения для того случая, когда сопротивление проводов меняется во время зарядки.

Было бы очень интересно найти и другие процессы, в которых имеет место такое простое соотношение между величинами различных слагаемых в балансе энергии.