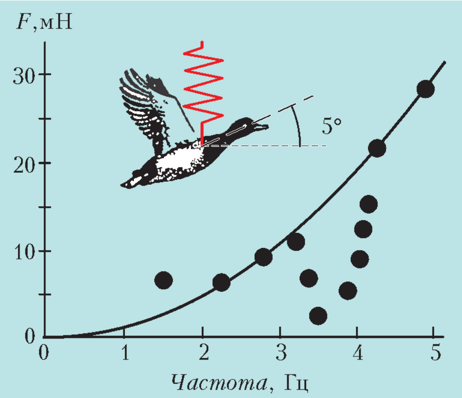


Рис. 5. Подъемная сила при ненулевом угле атаки

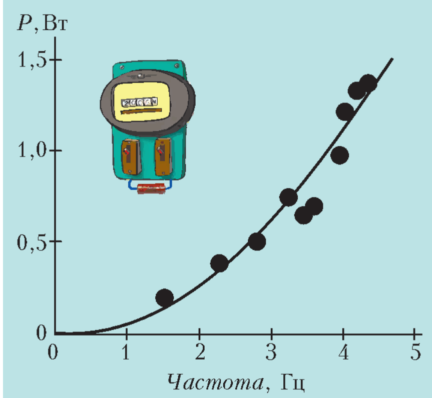


Рис. 6. Потери энергии и частота

крыла близка к частоте взмахов, крыло перестает быть крылом, имея в виду его асимметрию. Пока это, впрочем, всего лишь гипотеза.

А вот интересно, что происходит с потерями энергии, затрачиваемой источником питания электродвигателя на создание подъемной силы и на колебания крыльев? Для традиционных летательных аппаратов потери энергии должны быть пропорциональны кубу частоты, правда не для всех аппаратов. Например, для модного нынче ротоплана зависимость мощности $P$ от частоты вращения ротора более слабая. Похоже, что-то подобное имеет место для махолета (рис.6).

В этом нет ничего странного: частота, а значит, и скорость крыла относительно воздуха достаточно малы. При малых скоростях сила сопротивления среды не может быть пропорциональна квадрату скорости. Будь такое, лодка, единожды оттолкнувшись от берега, плыла бы в спокойной воде не только бесконечно долго, но и бесконечно далеко. А это, простите, уже противоречит здравому смыслу, часто называемому законом сохранения энергии. Конечно же, обязательно надо обратить внимание на то, что в области от трех до четырех герц потери энергии заметно ниже того, что предлагает квадратичная зависимость. Наверное, это правильно, поскольку в этом диапазоне частот подъемная сила мала.

Измеряется мощность $P$, затрачиваемая на махание крыльев, сравнительно просто. При заданном напряжении источника питания электродвигателя махолета один из каналов электронного осциллографа измеряет силу тока в цепи. Из полной мощности остается вычесть мощность, рассеиваемую в резисторе, через который электрически подпитывается махолет.

Устройств и конструкций, предназначенных для изучения машущего полета, предложено очень много. Задача стара, как весь живой мир, а время – новое. Не дальновидно это – упустить возможности электроники для решения такой интересной задачи. Двадцать первый век, знаете ли ...



# В начале было слово...

М.БОНДАРОВ

Обсудим еще несколько задач на соударения тел.

**Задача 11** (МФТИ, 1978). *Тонкая пластинка, двигавшаяся по направлению, составляющему угол* $\varphi$ *с ее плоскостью, ударяется о точно такую же покоящуюся пластинку, параллельную первой (рис.9). Пластинки сделаны из упругого материала, но поверхности у них шероховатые. При каком значении коэффициента трения* $\mu$ *между пластинками скорость, приобретенная второй пластинкой, будет максимальной?*

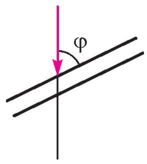


Рис. 9

**Решение.** Используя подходы к решению предыдущей задачи, попробуем рассмотреть сначала изменение импульсов тел вдоль оси $x$ (рис.10). Обозначим скорость верхней (первой) пластинки до удара через $\vec{v}_1$, после удара – через $\vec{u}_1$, а скорость второй (нижней) пластины после удара – через $\vec{u}_2$. Поскольку в направлении оси $x$ действуют только *упругие силы*, столкновение пластинок в этом направлении можно уподобить, например, упругому лобовому столкновению бильярдных шаров, один из которых в момент удара покоится. Известно, что в этом случае шары обмениваются скоростями, т.е. налетающий шар останавливается, передав свой импульс неподвижному. По аналогии то же произойдет с плас-

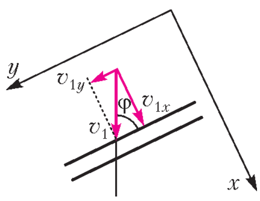


Рис. 10

Окончание. Начало – в предыдущем номере журнала.

тинками: в направлении оси $x$ проекция скорости $u_{1x}$ первой пластинки после удара обратится в ноль, в то время как

$$u_{2x} = v_{1x} .$$

Любящий строгие доказательства читатель легко убедится в этом, использовав совместно законы сохранения импульса и механический энергии:

$$mv_{1x} = mu_{1x} + mu_{2x} ,$$

$$\frac{mv_{1x}^2}{2} = \frac{mu_{1x}^2}{2} + \frac{mu_{2x}^2}{2} .$$

Рассмотрим теперь процессы, происходящие в направлении оси $y$. Скорость $u_{2y}$ приобретается второй пластиной под действием силы трения скольжения $F_{\text{тр}} = \mu N$ , где $N$ – модуль силы реакции. Пользуясь законом изменения проекции импульса второй пластинки на ось $y$, запишем

$$mu_{2y} = \mu N \Delta t ,$$

где $\Delta t$ – время, за которое сравниваются скорости пластинок вдоль оси $y$. Аналогично записываем тот же закон для второй пластинки вдоль оси $x$:

$$mu_{2x} = N\Delta t .$$

Из последних двух равенств получим

$$\frac{u_{2y}}{u_{2x}} = \mu .$$

Запишем далее закон сохранения импульса для системы из двух пластин в направлении оси $y$:

$$mv_{1y} = mu_{1y} + mu_{2y} .$$

Скорость нижней пластинки будет *максимальной* в том случае, если за время, пока происходит упругая деформация, прекратится проскальзывание одной пластинки относительно другой. Или, другими словами, составляющие скоростей вдоль плоскости пластинок за время соударения сравняются. В противном случае сила трения при проскальзывании будет продолжать ускорять нижнюю пластинку, что приведет к дальнейшему возрастанию ее скорости. Выразим *условие прекращения проскальзывания* математически:

$$u_{1y} = u_{2y} .$$

Тогда

$$u_{2y} = \frac{v_{1y}}{2} .$$

Окончательно получим

$$\mu = \frac{u_{2y}}{u_{2x}} = \frac{v_{1y}}{2v_{1x}} = \frac{v_1 \cos\varphi}{2v_1 \sin\varphi} = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\varphi .$$

**Задача 12.** *По гладкой наклонной плоскости с углом $\alpha = 30°$ при основании скользит ящик с песком массой $M = 10$ кг. Когда в ящик попадает пуля массой $m = 10$ г, летевшая горизонтально, он останавливается. Определите скорость пули, если непосредственно перед попаданием скорость ящика была $v = 0{,}2$ м/с.*

**Решение.** Поскольку столкновение пули и ящика является *абсолютно неупругим*, будем использовать закон сохранения импульса. Направим ось $x$ вдоль наклонной плоскости (рис.11) и запишем этот закон в проекциях на эту ось:

$$Mv - mu\cos\alpha = 0 , \text{ откуда}$$

$$u = \frac{Mv}{m\cos\alpha} \approx 230 \text{ м/с} .$$

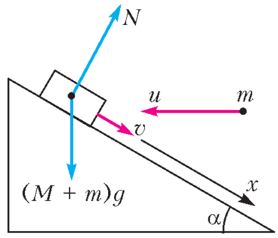

Рис. 11

Осторожный и внимательный школьник может подумать: «Как-то уж слишком просто все получилось. Предыдущие задачи решались не так легко». И, действительно, присмотримся повнимательнее к рисунку 11: а почему бы не направить ось $x$ горизонтально? Вот тут-то нас ожидает очередной неприятный сюрприз – ответ получится иной:

$$Mv\cos\alpha - mu = 0 , \text{ откуда } u = \frac{Mv\cos\alpha}{m} \approx 174 \text{ м/с} .$$

Какое же решение верное?

Давайте соберем воедино то главное, что нам известно о применимости закона сохранения импульса. 1) Его можно использовать, когда система замкнута. 2) Если равнодействующая внешних сил перпендикулярна некоторой оси, то проекция импульса системы на это направление сохраняется. А ведь мы использовали этот закон в векторном виде и в незамкнутой системе. Например, при решении задачи 7 о разрыве снаряда в верхней точке. При этом сила тяжести была единственной внешней силой и, естественно, ничем не была скомпенсирована. Почему же в таком случае закон выполнялся? Все дело в том, что изменяет импульс системы не сама внешняя сила, а импульс этой силы, т.е. ее произведение на время действия силы. Если же это время очень мало, а сила остается конечной величиной, то импульс системы сохраняется. И только в редких случаях, когда даже при малом времени действия внешней силы ее величина резко возрастает, пренебрегать импульсом внешней силы нельзя.

Вернемся к нашей задаче. При попадании пули в ящик резко возрастает величина силы реакции $\vec{N}$ , действующей на ящик со стороны наклонной плоскости, поэтому импульсом этой силы *даже при кратковременном воздействии пренебрегать нельзя*. Зато можно выбрать ось, перпендикулярную силе реакции, в нашем случае – вдоль наклонной плоскости. В этом направлении проекция силы тяжести имеет фиксированное значение, значит, за очень малое время попадания пули в ящик проекция импульса системы остается неизменной. Так что верно наше первое решение.

### Массивное тело

Задачу об абсолютно упругом столкновении тел, масса одного из которых гораздо больше массы другого, можно решать тем же способом, что и другие подобные задачи, т.е. используя законы сохранения импульса и механической энергии. Однако введение в условие *массивного тела* во многих случаях позволяет значительно упростить решение.

**Задача 13** (МФТИ, 1994). *По направлению к неподвижному шарику движется массивная плита с постоянной скоростью $v = 4$ м/с, направленной вертикально вверх и перпендикулярно поверхности плиты. В мо-*

*мент когда плита находится на расстоянии $H$ = 1 м от шарика, шарик отпускают. На какое максимальное расстояние от плиты удалится шарик после упругого удара о плиту? Масса шарика много меньше массы плиты.*

**Решение.** Поскольку плита *массивная*, т.е. ее масса во много раз больше массы шарика, воздействие на нее шарика при столкновении не окажет влияния и она продолжит свое равномерное движение вверх с прежней скоростью. Таким образом, можно связать инерциальную систему отсчета с плитой. В этой системе в начальный момент времени шарик находится на высоте $H$ над плитой и начинает двигаться вниз со скоростью $v$. При *упругом ударе* механическая энергия сохраняется (*сопротивлением воздуха* пренебрегаем). Шарик удалится от плиты на *максимальное* расстояние в тот момент, когда его скорость в выбранной системе отсчета станет равной нулю. Тогда, в соответствии с законом сохранения энергии

$$mgH + \frac{mv^2}{2} = mgH_{\max},$$

получим

$$H_{\max} = H + \frac{v^2}{2g} = 1{,}8 \text{ м}.$$

### Коварство силы трения

Обратимся теперь к некоторым особенностям проявления сил в механике. И начнем с силы трения, судя по всему, самой коварной из основных механических сил.

**Задача 14.** *На горизонтальном столе лежит деревянный брусок массой $M$ = 400 г, к которому привязана невесомая и нерастяжимая нить, перекинутая через невесомый блок, укрепленный на краю стола. К свободному концу нити подвешивают груз массой $m$ = = 100 г. С каким ускорением станут двигаться после этого тела, если коэффициент трения между бруском и столом $\mu$ = 0,3? Трением в оси блока пренебречь.*

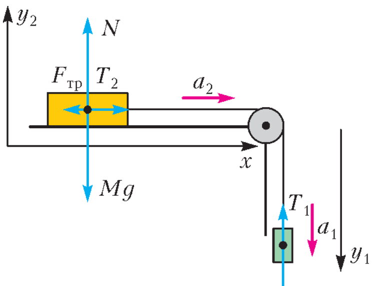

Рис. 12

**Решение.** Изобразим сначала все силы, действующие на каждое тело системы (рис.12). Запишем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на горизонтальную ось $x$ и вертикальную ось $y_2$ для бруска массой $M$ и на вертикальную ось $y_1$ для груза массой $m$:

$$T_2 - F_{тр} = Ma_2,$$
$$N - Mg = 0,$$
$$mg - T_1 = ma_1.$$

Так как *нить нерастяжима*, модули ускорений тел одинаковы:

$$a_1 = a_2 = a.$$

Модули сил натяжения нити равны, так как *нить невесома* и *блок идеален* (для раскручивания невесомого блока без трения не нужен вращательный момент):

$$T_1 = T_2 = T.$$

Сила трения скольжения связана с силой реакции опоры соотношением

$$F_{тр} = \mu N.$$

Тогда из записанного выше получим систему уравнений

$$mg - T = ma,$$
$$T - \mu Mg = Ma,$$

откуда легко найдем искомое ускорение:

$$a = g\frac{m - \mu M}{M + m}.$$

Однако после подстановки числовых значений получается весьма странный ответ: $a = -2 \text{ м/с}^2$, противоречащий физическому смыслу. Как интерпретировать такой ответ и каковы причины его возникновения?

Очевидно, что после начала движения брусок не может двигаться влево. Мы получили абсурдный ответ на основании предположения, что брусок начнет *скользить* вправо и на него при этом станет действовать *сила трения скольжения* $F_{тр} = \mu N$. Анализ ответа показывает: для того чтобы брусок начал двигаться, к нити необходимо подвесить груз массой $m > \mu M$. В противном случае (как в данной задаче) сила натяжения нити не превысит максимальную силу трения покоя. Таким образом, брусок останется в покое, и его ускорение будет равно нулю.

**Задача 15.** *На наклонной плоскости, составляющей с горизонтом угол $\alpha = 30°$, находится груз массой $M$ = = 4 кг (рис.13). К грузу привязан легкий шнур, перекинутый через невесомый блок, укрепленный на вершине наклонной плоскости. К другому концу шнура подвешена гиря массой $m$ = 1 кг. Определите ускорение тел после того, как система будет предоставлена сама себе, если коэффициент трения между грузом и наклонной плоскостью $\mu$ = 0,4. Трением в оси блока пренебречь.*

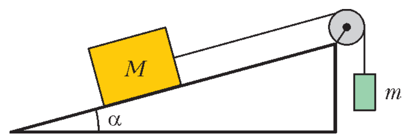

Рис. 13

**Решение.** Изобразим все силы, действующие на каждое тело системы (рис.14). Мы не знаем заранее, куда движутся тела, поэтому предположим, что гиря опускается. Проведем общий ход решения аналогично предыдущей задаче – запишем уравнение второго закона Ньютона в проекциях на оси $x$ и $y_2$ для тела массой $M$ и на ось $y_1$ для тела массой $m$:

$$T_2 - F_{тр} - Mg\sin\alpha = Ma_2,$$
$$N - Mg\cos\alpha = 0,$$
$$mg - T_1 = ma_1,$$

где

$$F_{тр} = \mu N.$$

Из записанного, *с учетом идеальности нити и блока,*

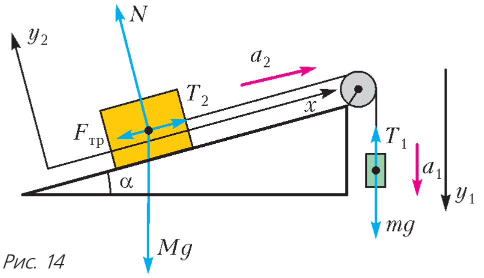

Рис. 14

получим систему уравнений

$$mg - T = ma,$$
$$T - \mu Mg\cos\alpha - Mg\sin\alpha = Ma,$$

откуда выразим искомое ускорение:

$$a = g\frac{m - M(\sin\alpha + \mu\cos\alpha)}{M+m}.$$

Подставив числовые значения, находим $a = -4{,}8\ м/с^2$. Следовательно, наше предположение, что гиря опускается, неверно.

Заметим, что в отсутствие трения знак «минус» указывал бы на то, что гиря поднимается вверх с тем же по модулю ускорением. При наличии трения нужно рассмотреть второй случай, проделав аналогичные выкладки.

Изменим на противоположные направления силы трения и ускорений тел. Записав уравнения, подобные предыдущим, получим

$$T - mg = ma,$$
$$Mg\sin\alpha - T - \mu Mg\cos\alpha = Ma.$$

Отсюда можно найти искомое ускорение, но оно оказывается снова отрицательным:

$$a = g\frac{M(\sin\alpha - \mu\cos\alpha) - m}{M+m} \approx -0{,}8\ м/с^2.$$

Теперь можно сделать окончательный вывод: тела находятся в покое, их ускорение равно нулю.

*Замечание.* Решение задачи можно было бы значительно упростить, предварительно выяснив, куда движутся тела при отсутствии трения. Тогда при наличии трения тела либо не движутся вообще, либо будут двигаться в ту же сторону, что и в отсутствие трения.

**Задача 16** (ЕГЭ). *Грузовой автомобиль массой $M$ = 4 т тянет за нерастяжимый трос вверх по уклону легковой автомобиль, масса которого $m$ = 1 т. Двигатель легкового автомобиля выключен. С каким максимальным ускорением могут двигаться автомобили, если угол уклона $\alpha = \arcsin 0{,}1$, а коэффициент трения между шинами грузового автомобиля и дорогой $\mu$ = 0,2? Силой трения качения, действующей на легковой автомобиль, пренебречь.*

**Решение.** Итак, мы снова имеем дело с экстремальной задачей. Как правило, в подобных задачах (на движение по наклонной плоскости) требуется просто определить ускорение, здесь же речь идет о *максимальном* ускорении. Тогда, по второму закону Ньютона, равнодействующая сила должна тоже достигнуть *максимального* значения.

Единственной переменной силой, действующей на систему из двух автомобилей, является сила тяги двигателя. Она нарастает до тех пор, пока не начнется проскальзывание ведущих колес грузового автомобиля. Другими словами, роль силы тяги выполняет сила трения покоя, направленная вперед и приводящая в движение автомобили. Ее максимальное значение равно $F_{тр} = \mu N$, где $N = Mg\cos\alpha$. Поскольку трос *нерастяжимый*, ускорение автомобилей будет одинаковым, и их можно рассматривать как систему с общей массой $M + m$, движущуюся с ускорением $a$. Разгоняющая систему *максимальная сила трения покоя*, действующая на ведущие колеса грузового автомобиля, равна $\mu Mg\cos\alpha$. Тормозят же систему автомобилей проекции сил тяжести $Mg\sin\alpha$ и $mg\sin\alpha$ на направление уклона. Таким образом, равнодействующая сил, приложенных к системе автомобилей, равна

$$F = g\left(\mu M\cos\alpha - (M+m)\sin\alpha\right).$$

По второму закону Ньютона искомое максимальное ускорение будет равно

$$a = \frac{F}{M+m} = g\left(\frac{M}{M+m}\mu\cos\alpha - \sin\alpha\right) = 0{,}6\ м/с^2.$$

## Пружина и упругий шнур

Скрытая информация в условии задачи может быть спрятана иначе: кое-что авторы как бы подразумевают очевидным. Такую информацию мы будем выделять в решении не только курсивом, но и дополнительным подчеркиванием.

**Задача 17.** *Пластинки массами $m$ и $2m$ соединены легкой пружиной жесткостью $k$ (рис.15). С какой минимальной высоты $h$ должен упасть на верхнюю пластинку грузик массой $m$, чтобы при растяжении пружины после удара нижняя пластинка оторвалась от стола? Удар считать неупругим.*

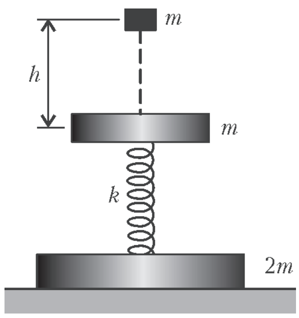

Рис. 15

**Решение.** В начальный момент верхняя пластинка находится *в равновесии*, поэтому сила тяжести $mg$ компенсируется силой упругости $kx_0$ сжатой пружины:

$$mg = kx_0,$$

где $x_0$ – начальная деформация сжатия пружины. В момент *отрыва* исчезает сила реакции опоры, а нижняя пластинка *останавливается* (по условию грузик падает с *минимальной* высоты), поэтому

$$2mg = kx,$$

где $x$ – растяжение пружинки в этот момент.

*Сопротивление воздуха отсутствует*, поэтому, по закону сохранения механической энергии,

$$mgh = \frac{mv^2}{2},$$

где $v$ – скорость грузика перед ударом о верхнюю пластинку. *Удар можно считать неупругим*, а *грузик прилипает к пластинке мгновенно*, следовательно, при ударе будет справедлив закон сохранения импульса

$$mv = 2mu,$$

где $u$ – скорость грузика вместе с верхней пластинкой сразу после удара.

Если учесть не только энергию растянутой пружины в конце, но и энергию сжатой пружины в момент удара, то закон сохранения энергии примет вид

$$\frac{2mu^2}{2}+\frac{kx_0^2}{2}=2mg(x+x_0)+\frac{kx^2}{2}.$$

Окончательно получим

$$h=15\frac{mg}{k}.$$

**Задача 18.** *Груз массой $m = 5$ кг подвешен к потолку на упругом резиновом шнуре жесткостью $k = 500$ Н/м. Грузу дважды сообщают начальную скорость, направленную вертикально вверх. В первом случае эта скорость равна $v_1 = 0{,}5$ м/с, во втором – $v_2 = 2$ м/с. Во сколько раз максимальная высота подъема груза (отсчитанная от начальной точки) во втором случае больше, чем в первом?*

**Решение.** Мы уже видели (в задаче 5), что замена *невесомого стержня* на *невесомую нить* приводит к изменению хода решения задачи. Аналогичная картина наблюдается, если вместо *пружины* груз подвесить на *упругом шнуре*.

Итак, в данной задаче привычная пружина заменена на упругий шнур. Шнур ведет себя подобно пружине *только при растяжении*. При попытке сжатия в шнуре не возникают деформации, и груз перестает его «замечать». Можно предположить, что и величины скоростей заданы не случайно: при малой скорости шнур ведет себя как растянутая пружина, а при большой скорости в некоторый момент он перестает быть растянутым. Для подтверждения этой гипотезы рассчитаем, при какой начальной скорости $v_0$ груз достигнет той точки, где исчезнет деформация шнура.

По закону сохранения энергии,

$$\frac{kx_0^2}{2}+\frac{mv_0^2}{2}=mgx_0,$$

где $x_0$ – величина деформации шнура, вызванная подвешиванием груза. Определим ее из условия равновесия:

$$mg=kx_0,\text{ и } x_0=\frac{mg}{k}=0{,}1\text{ м}.$$

Отсюда, с учетом предыдущего равенства, получим

$$v_0=g\sqrt{\frac{m}{k}}=1\text{ м/с}.$$

Как видим, наше предположение подтвердилось:

$$v_1<v_0<v_2.$$

Рассмотрим теперь оба случая по отдельности.

1) При $v_1 < v_0$ шнур ведет себя как пружина. По закону сохранения энергии,

$$\frac{kx_0^2}{2}+\frac{mv_1^2}{2}=\frac{kx^2}{2}+mg(x_0-x),$$

где $x$ – конечная деформация растяжения шнура в тот момент, когда груз остановится. Подставив сюда выражение для $x_0$, получим квадратное уравнение. Его корни равны $x_1 = 0{,}05$ м и $x_2 = 0{,}15$ м. Сравнивая их с числовым значением $x_0$, заключаем, что деформации растяжения шнура удовлетворяет только первый корень. Значит, высота подъема груза в первом случае равна

$$h_1=x_0-x_1=0{,}05\text{ м}.$$

2) При $v_2 > v_0$ после подъема груза на высоту $h_0 = x_0$ шнур перестает деформироваться, а груз продолжает движение только под действием силы тяжести. Запишем снова закон сохранения энергии:

$$\frac{kx_0^2}{2}+\frac{mv_2^2}{2}=mgh_2,$$

откуда

$$h_2=\frac{mg}{2k}+\frac{v_2^2}{2g}=0{,}25\text{ м}.$$

В итоге получаем

$$\frac{h_2}{h_1}=5.$$

### Медленное движение

**Задача 19.** *Небольшое тело массой $m$ медленно втащили на горку, действуя силой $F$, которая в каждой точке направлена по касательной к траектории. Найдите работу этой силы, если высота горки $h$, длина ее основания $l$ и коэффициент трения $\mu$.*

**Решение.** Тело втаскивают *медленно*, поэтому модуль его скорости остается неизменным и малым. Неизменность модуля скорости приводит к тому, что действующая на тело по *касательной к траектории* сила равна сумме силы трения скольжения и проекции силы тяжести на направление касательной к траектории. Для расчета искомой работы разобьем траекторию на маленькие участки длиной $\Delta s$, каждый из которых можно считать прямолинейным. Работа силы $F$ на таком участке равна

$$\Delta A=\mu mg\Delta s\cos\alpha+mg\Delta s\sin\alpha.$$

Таким образом, работа силы $F$ идет на работу против силы трения и на увеличение потенциальной энергии тела. Заметим, что $\Delta s\cos\alpha=\Delta l$ – проекция участка пути $\Delta s$ на горизонтальное направление и $\Delta s\sin\alpha=\Delta h$ – проекция на вертикальное направление. Тогда, просуммировав выражения для величин работ на малых участках, получим искомую работу:

$$A=\mu mgl+mgh=mg(\mu l+h).$$

### Некоторые особенности заданий ЕГЭ базового и повышенного уровней сложности

Начнем с задач, в которых можно получить верный ответ, даже не заметив тонкости их условий.

**Задача 20** (ЕГЭ). *Ящик тянут по земле за веревку по горизонтальной окружности длиной $L = 40$ м так, что он движется с постоянной по модулю скоростью. Модуль силы трения, действующей на ящик со стороны земли, равен $F_{тр} = 80$ Н. Чему равна работа силы тяги за один оборот?*

**Решение.** В этой задаче можно получить правильный ответ, допустив ошибку в решении. Приведем его.

Окружность *горизонтальная*, поэтому сила тяжести компенсируется силой реакции опоры. Модуль скорости *постоянный* – сила тяги равна по модулю и противоположна по направлению силе трения. Тогда искомая работа силы тяги равна по модулю работе силы трения:

$$A=F_{тр}L=3200\text{ Дж}.$$

В отличие от задачи 19, в данном случае не говорится о движении с *малой* скоростью. Поэтому обязательно возникает центростремительное ускорение. А вот какая сила его вызывает? Эта сила должна быть направлена к центру окружности. Но помимо силы тяги и силы трения других сил в горизонтальной плоскости нет. Приходим к выводу, что сила тяги направлена под некоторым углом $\alpha$ к касательной к окружности так, чтобы ее параллельная составляющая $F_{\parallel} = F\cos\alpha$ была по модулю равна силе трения, а перпендикулярная составляющая $F_{\perp} = F\sin\alpha$ создавала центростремительное ускорение.

Как видим, непосредственно на ответ приведенное уточнение не влияет, но глубина понимания условия задачи становится иной.

**Задача 21** (ЕГЭ). *Период колебаний потенциальной энергии пружинного маятника 0,5 с. Каким будет период колебаний другого маятника, если и масса груза маятника, и жесткость его пружины в 4 раза больше, чем у первого?*

**Решение.** При беглом прочтении условия можно не заметить, что задан не привычный период колебаний пружинного маятника, а *период колебаний его потенциальной энергии*. Зато требуется определить просто период колебаний другого пружинного маятника. Напомним, что и потенциальная и кинетическая энергии пружинного (и математического тоже!) маятника изменяются вдвое чаще, чем меняются его координата, скорость и ускорение.

Итак, если мы заметили хитрости составителей задачи, то дальнейшее решение не вызовет затруднений. Поскольку период колебаний потенциальной энергии первого маятника равен $T_{\text{пэ}1} = 0{,}5$ с, то период его колебаний будет вдвое больше: $T_1 = T_{\text{пэ}1} = 1$ с. Из формулы периода колебаний пружинного маятника

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

следует, что при одновременном увеличении массы $m$ груза маятника и жесткости $k$ его пружины в 4 раза период колебаний не изменится. Таким образом,

$$T_2 = T_1 = 1 \text{ с}.$$

**Задача 22** (ЕГЭ). *С аэростата, зависшего над землей, упал груз. Через 10 с он достиг поверхности земли. На какой высоте находился аэростат? Сопротивление воздуха пренебрежимо мало.*

**Решение.** Это совсем простая, но не случайная для данной статьи задача. В условии задачи оговорены все детали: аэростат *завис* – начальная скорость груза равна нулю, *сопротивление воздуха пренебрежимо мало* – ускорение груза равно $g$. Тогда искомая высота равна

$$h = \frac{gt^2}{2} = 500 \text{ м}.$$

**Задача 23.** *Теннисный мяч падает с большой высоты на землю. Определите его ускорение сразу после абсолютно упругого отскока.*

**Решение.** Обратите внимание, что обязательная в подобных задачах присказка «*сопротивлением воздуха пренебречь*» в условии отсутствует. Что это – небрежность составителей, забывших указать очевидную поправку, или сознательное ее исключение?

Если сопротивление воздуха пренебрежимо мало, то ответ в задаче очевиден: ускорение мяча как до, так и после отскока равно $g$. Однако, поскольку мяч падает *с большой высоты*, сопротивление воздуха должно оказывать существенное влияние на его движение. Не слишком тяжелый теннисный мяч через некоторое время с начала полета перестанет ускоряться – сила сопротивления воздуха пропорциональна скорости мяча. Тогда за мгновение до удара сила сопротивления будет равна по модулю силе тяжести и противоположна ей по направлению. Сразу после *абсолютно упругого отскока* модуль скорости мяча останется тем же, значит, сила сопротивления сохранит свою величину, изменив только направление на противоположное. Таким образом, в этот момент равнодействующая сил, приложенных к мячу, равна $2mg$, а его ускорение равно

$$a = 2g.$$

Неожиданный ответ, не правда ли?

Иногда случается так, что условие старается как бы увести решающего с верного пути. Например, с помощью избыточных данных. Рассмотрим показательный в этом смысле пример.

**Задача 24** (ЕГЭ). *На фотографии (рис.16) представлена установка для изучения равномерного движения бруска (1) массой 0,1 кг, на котором находится груз (2)*

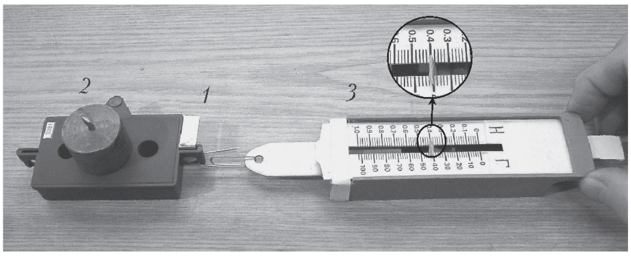


*Рис. 16*

*массой 0,1 кг. Чему равна работа равнодействующей всех сил, действующих на брусок с грузом, при перемещении на 20 см?*

**Решение.** В этой задаче *все* числовые данные не играют никакой роли. Для решения достаточно обратить внимание на две вещи: во-первых, движение бруска *равномерное*; во-вторых, нужно найти работу *равнодействующей всех сил*, действующих на брусок с грузом. Теперь все предельно ясно: при равномерном движении ускорение равно нулю, значит, равнодействующая всех сил (которую показывает диаметр 3) тоже равна нулю. Тогда равна нулю и ее работа.

В заключение – обещанная таблица «скрытого смысла». В ней дается возможное толкование отдельных фраз, встречающихся в задачах механики. Эта таблица далеко не полная. На наш взгляд, было бы полезно продолжить ее. При желании читатель может справиться с этим самостоятельно.

**Упражнения**

**1** (ЕГЭ). Небольшая шайба после удара скользит вверх по наклонной плоскости из точки $A$ (рис.17). В точке $B$ наклонная плоскость без излома переходит в наружную поверхность гори-

**Таблица «скрытого смысла»**

| | Слова в условии задачи | Как их можно использовать в решении |
|---|---|---|
| 1. | *Тормозной путь* | Конечная скорость равна нулю |
| 2. | *Трогается с места* | Начальная скорость равна нулю |
| 3. | *Нерастяжимая нить, недеформируемый стержень* | Модуль проекции скорости любой точки нити (стежня) на направление нити (стержня) остается неизменным в любой точке нити (стержня) |
| 4. | *Невесомая нить, невесомый стержень* | Сила натяжения нити (стержня) одинакова в любой ее (его) точке |
| 5. | *Математический маятник в крайней точке* | Центростремительное ускорение равно нулю, равнодействующая сила направлена по касательной к окружности |
| 6. | *Отрывается от опоры* | Сила реакции опоры равна нулю |
| 7. | *Гладкая поверхность* | Сила трения рана нулю, при отсутствии работы внешних сил выполняется закон сохранения механической энергии |
| 8. | *Небольшое (маленькое) тело* | Размеры тела несущественны, его можно считать материальной точкой |
| 9. | *Установившаяся скорость движения, максимальная скорость движения тела* | Ускорение тела равно нулю, равнодействующая приложенных к телу сил равна нулю |
| 10. | *Абсолютно неупругий удар* | Часть механической энергии (или вся энергия) переходит во внутреннюю; можно применять закон сохранения импульса |
| 11. | *Абсолютно упругий удар* | Выполняются законы сохранения механической энергии и импульса |
| 12. | *Длительность столкновения считать очень малой; шарик мгновенно прилипает к другому телу* | Даже при наличии внешних нескомпенсированных сил можно применять закон сохранения импульса |
| 13. | *Сопротивлением воздуха пренебречь* | В отсутствие других сил тело движется под действием только силы тяжести с ускорением свободного падения |
| 14. | *Тело падает с достаточно большой высоты* | В этом случае сопротивлеием воздуха нельзя пренебрегать, и через некоторое время тело будет двигаться равномерно |
| 15. | *Тело движется медленно* | Можно не учитывать изменение кинетической энергии тела; при движении тела по окружности центростремительное ускорение пренебрежимо мало |
| 16. | *Пружина сжата или растянута* | Пружина обладает потенциальной энергией, которую нужно учитывать в законе сохранения механической энергии |
| 17. | *Груз подвешен к упругому резиновому шнуру* | В отличие от пружины, сила упругости в шнуре возникает только при растяжении |
| 18. | *Период колебаний потенциальной (кинетической) энергии* | Период колебаний потенциальной (кинетической) энергии тела вдвое меньше периода колебаний самого тела |
| 19. | *Тяжелая плита сталкивается* | Скорость плиты при столкновении не меняется |
| 20. | *Если в условии говорится о трении...* | Формулу $F_{тр} = \mu N$ можно использвать только в двух случаях: 1) при скольжении тела; 2) когда тело находится в покое на грани скольжения |

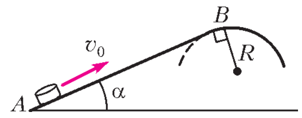


Рис. 17

зонтальной трубы радиусом $R$. Если в точке $A$ скорость шайбы превосходит $v_0 = 4$ м/с, то в точке $B$ шайба отрывается от опоры. Длина наклонной плоскости $AB = L = 1$ м, угол $\alpha = 30°$. Коэффициент трения между наклонной плоскостью и шайбой $\mu = 0{,}2$. Найдите внешний радиус трубы $R$.

**2** (ЕГЭ). Начальная скорость снаряда, выпущенного из пушки вертикально вверх, равна 500 м/с. В точке максимального подъема снаряд разорвался на два осколка. Первый упал на землю вблизи точки выстрела, имея скорость в 2 раза больше начальной скорости снаряда, а второй оказался в этом же месте через 100 с после разрыва. Чему равно отношение массы первого осколка к массе второго осколка? Сопротивлением воздуха пренебречь.

**3** (МФТИ, 1978). Тонкая пластинка массой $m_1$, движущаяся со скоростью $v_0$, ударяется о неподвижную тонкую пластинку массой $m_2$, расположенную параллельно первой (см. рис.9). Скорость $v_0$ составляет угол $\varphi$ с плоскостью пластинок. Удар абсолютно упругий, трения между пластинками нет. С какими скоростями будут двигаться пластинки после удара?

**4.** Шарику, висящему на легкой нерастяжимой нити длиной 1,6 м, сообщают горизонтальную скорость 8 м/с. На какую максимальную высоту поднимется шарик?

**5.** На тележке массой $M = 400$ г, которая может катиться без трения по горизонтальной плоскости, имеется легкий кронштейн, на котором подвешен на нити маленький шарик массой $m = 200$ г. На тележку по горизонтали налетает и абсолютно неупруго сталкивается с ней шар массой $M$ (рис.18).

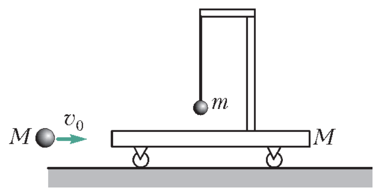


Рис. 18

После столкновения, в тот момент когда нить, на которой подвешен шарик, отклонилась на максимальный угол от вертикали, скорость тележки была $v = 4$ м/с. Какова была скорость шара $v_0$ до столкновения? Длительность столкновения шара с тележкой считать очень малой.

**6** (Олимпиада «Ломоносов», 2015). Достаточно длинная доска массой $M$ движется поступательно вдоль своей длинной стороны со скоростью $v_0$. В центр доски аккуратно кладут груз массой $m$. Коэффициент трения между грузом и доской $\mu$. Определите максимальное смещение груза относительно доски.

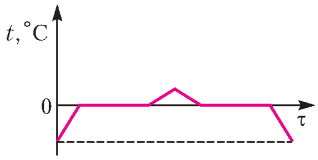

Рис. 6

**10.** Кулон приводил в соприкосновение два совершенно одинаковых шарика, один из которых был заряжен, а другой – нет. Перетекая с одного шарика на другой, заряды распределялись симметрично, т.е. поровну – ведь ни один из шариков не имел преимущества перед другим. Процесс деления подобным образом мог быть неоднократно продолжен.

**11.** Исходя из симметрии, напряженность поля должна быть направлена перпендикулярно нити по всем направлениям и быть одинаковой для равноудаленных от нити точек (рис.7; заряд нити принят положительным).

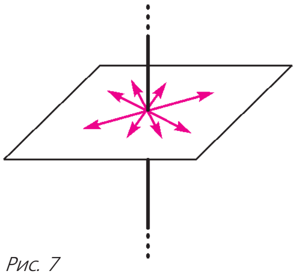
Рис. 7

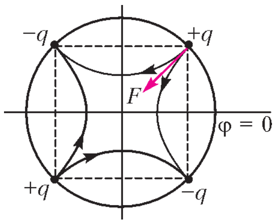

Рис. 8

**12.** Напряженность больше при разноименных зарядах. При одноименных зарядах, в силу симметрии их расположения, напряженность поля в данной точке равна нулю.

**13.** Поле положительного заряда, помещенного в двугранный угол, частично совпадает с полем четырех зарядов, размещенных в вершинах квадрата (рис.8; рисунок построен с помощью метода электростатических изображений). Симметрия картины поля позволяет найти направление искомой силы.

**14.** Если составить из двух таких полусфер целую сферу, то поле внутри нее будет равно нулю. Значит, поле одной из полусфер в плоскости круга, который их друг от друга отделяет, должно компенсировать поле другой. Поскольку поля полусфер симметричны относительно этого круга, напряженность поля каждой из них перпендикулярна его плоскости.

**15.** Из симметрии схемы следует равенство потенциалов точек $C$ и $D$ (рис.9), в силу чего ток по этой перемычке идти не будет. Дальнейший расчет не представляет труда:

$$R_{AB} = \frac{5}{12}R .$$

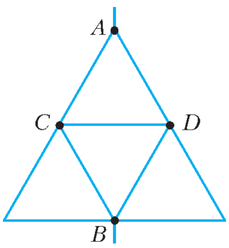

Рис. 9

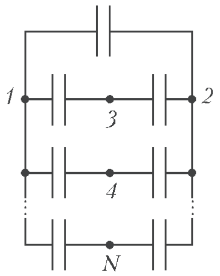

Рис. 10

**16.** Из симметрии очевидно, что при измерении емкости цепочки между точками *1* и *2* (рис.10) разность потенциалов между двумя любыми из других точек равна нулю. Значит, включенные между этими точками конденсаторы не заряжены и поэтому не дают вклада в общую емкость. Тогда емкость цепочки равна $NC/2$.

**17.** Создаваемые симметрично расположенными полукольцевыми токами магнитные поля в центре кольца равны по величине и противоположны по направлению, поэтому компенсируют друг друга и на стрелку не действуют.

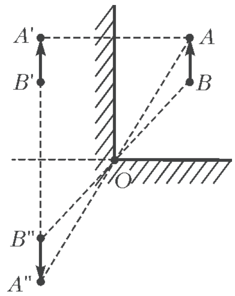

Рис. 11

**18.** Изображение лица будет перевернутым. В таком зеркале происходит двойное отражение (рис.11). Стрелки $AB$ и $A''B''$ расположены симметрично относительно центра $O$, такая же симметрия будет между любым предметом и его изображением.

**19.** В этом случае предмет и его изображение расположены симметрично относительно линзы на расстоянии $2F$ от нее, поэтому расстояние между ними равно $4F$.

**20.** Дифракционный спектр, в отличие от призматического, обладает симметрией.

**21.** В магнитном поле положительно заряженные частицы отклоняются влево. Электрон и позитрон, отличающиеся знаком заряда, пройдут по симметричным траекториям. Следовательно, позитрону соответствует вспышка *1*.

### Микроопыт

Если вы идете перпендикулярно зеркалу, то скорость вашего симметричного изображения относительно вас равна удвоенной вашей скорости. Если вы двигаетесь под углом $\alpha$ к зеркалу, то этот результат следует умножить на $\sin\alpha$.

## В НАЧАЛЕ БЫЛО СЛОВО...

**1.** $R = \dfrac{v_0^2}{g\cos\alpha} - 2L(\mu + \operatorname{tg}\alpha) \approx 0{,}3$ м. **2.** $\dfrac{m_1}{m_2} \approx 0{,}43$.

**3.** $v_1 = v_0\dfrac{\sqrt{m_1^2 + 2m_1m_2\cos 2\varphi + m_2^2}}{m_1 + m_2}$, $v_2 = v_0\dfrac{2m_1\sin\varphi}{m_1 + m_2}$.

**4.** $h_{\max} \approx 3$ м.

**5.** $v_0 = v\dfrac{2M + m}{M} = 10$ м/с. **6.** $\Delta L_{\max} = \dfrac{Mv_0^2}{2\mu g(M + m)}$.

## LVII МЕЖДУНАРОДНАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ОЛИМПИАДА

**1** (решение Г.Вепрева). Пусть $\angle CAB = \alpha$ (рис.12). Тогда из $BF = FA$ следует $\angle FBA = \angle FAB = \alpha$, а из того, что $AC$ – биссектриса угла $DAB$, и из равенства $CD = DA$ следует

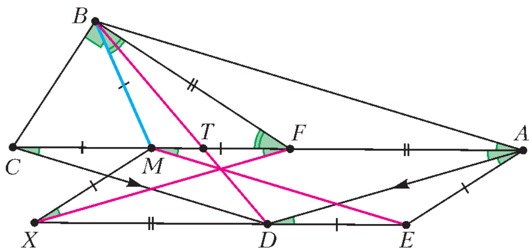

Рис. 12

$\angle CAD = \angle DCA = \alpha$. Далее, $AD$ – биссектриса угла $CAE$ и $DE = EA$, поэтому $\angle DAE = \angle DAC = \angle EDA = \alpha$. Тогда из $\angle EDA = \alpha = \angle DAC$ следует $DE \parallel AC$, и тогда из $EX \parallel AC$ следует, что точки $X$, $D$, $E$ лежат на одной прямой.

По условию $\angle CBF = 90^\circ$ и $BM$ – медиана, поэтому $BM = MC = MF$. Отсюда $\angle MBF = \angle BFM = \angle FAB + \angle FBA = 2\alpha$, поэтому если положить $BM = MC = MF = 1$, то $BF = 2\cos 2\alpha$, $AC = AF + FC = BF + 2BM = 2\cos 2\alpha + 2 = 4\cos^2\alpha$. Тогда $AD = \dfrac{AC}{2\cos\alpha} = 2\cos\alpha$, $AE = \dfrac{AD}{2\cos\alpha} =$