ВП по имени Центр масс

М.БОНДАРОВ

Решение задач на движение осуществляется, как правило, двумя основными способами – динамическим и энергетическим. Вспомните: стоит нам увидеть на рисунке к задаче бруски, нити и блоки, как наша рука тут же начинает старательно чертить стрелочки, изображающие приложенные к телам силы, после чего мы записываем уравнения второго закона Ньютона в проекциях на выбранные оси. А когда в условии задачи говорится, например, о столкновении тел, та же рука пишет законы сохранения импульса и энергии.

Однако попадаются и такие задачи, решить которые можно значительно быстрее, владея еще одним способом решения – методом центра масс. Мало того, иногда случается так, что этот способ является единственно возможным для решения задачи. Правда, при первом знакомстве метод центра масс чем-то напоминает волшебство: уж очень быстро и ловко удается прийти к ответу. Что ж, элементы физического волшебства не возбраняются. Да и заголовок статьи выбран не случайно: в память о волшебной палочке, уникальном изделии ВП, разработанном в лаборатории Алёны Саниной, героини фильма «Чародеи». Однако, в отличие от китежградского прибора наша волшебная палочка не всемогуща: она способна лишь оказывать надежную помощь при решении некоторых задач.

Напомним основные сведения о центре масс – ЦМ. Начнем с определения положения ЦМ. Проще всего это сделать, когда система состоит из двух одинаковых частиц. Тогда очевидно, что их ЦМ находится посередине между ними. Так же легко найти положение ЦМ для симметричной системы, например для однородного стержня. Ясно, что он совпадает с геометрическим центром системы (стержня). А как быть в том случае, когда симметрия нарушена? Пусть, к примеру, в системе из двух частиц масса m_1 одной в k раз больше массы m_2 другой. Тогда разумно предположить, что ЦМ будет ближе к первой частице – ведь ее вклад в общую массу системы больше. А раз она массивнее в k раз, то и расстояние от нее до ЦМ должно быть в k раз меньше. Определим теперь координату ЦМ нашей системы – точки C, обозначив координаты точек массами m_1 и m_2 через x_1 и x_2 соответственно (рис.1):

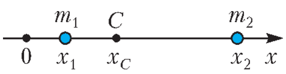

Рис. 1

$$k = \frac{m_1}{m_2} = \frac{x_2 - x_C}{x_C - x_1}, \text{ и } x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}. \qquad (1)$$

Симметричный вид этой формулы позволяет легко обобщить ее для случая, когда число входящих в систему тел становится больше. Например, если имеется n точек массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$ с координатами $x_1, x_2, \ldots, x_n$ соответственно, то координата ЦМ системы рассчитывается по формуле

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + \ldots + m_n x_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (2)$$

Если за малый промежуток времени Δt точки переместятся на $s_{1x}, s_{2x}, \ldots, s_{nx}$, то из формулы (2) легко определить перемещение ЦМ системы:

$$s_{Cx} = \frac{m_1 s_{1x} + m_2 s_{2x} + \ldots + m_n s_{nx}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (3)$$

Выражение для проекции на ось x скорости ЦМ системы получается из формулы (3) делением на Δt:

$$v_{Cx} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} + \ldots + m_n v_{nx}}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (4)$$

В частности, для системы из двух материальных точек

$$v_{Cx} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}. \qquad (5)$$

Очевидно, что каждую из записанных выше формул можно использовать для любой другой оси, заменив в ней индекс x на y или z. Таким образом, скорость ЦМ системы частиц может быть представлена в векторном виде:

$$\vec{v}_C = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 + \ldots + m_n \vec{v}_n}{m_1 + m_2 + \ldots + m_n}. \qquad (6)$$

Заметим, что в числителе правой части этого выражения стоит векторная сумма импульсов частиц, т.е. полный импульс системы частиц $\vec{p}$, а в знаменателе – ее полная масса M. Значит, полный импульс системы частиц равен произведению массы всей системы на скорость ее ЦМ:

$$\vec{p} = M\vec{v}_C. \qquad (7)$$

Эта простая формула обладает двумя важными свойствами. Во-первых, она имеет тот же вид, что и для одной частицы. Поэтому ЦМ системы приобретает смысл точки, скорость которой равна скорости движения системы как целого. Во-вторых, с ее помощью закон сохранения импульса может быть сформулирован так:

В инерциальной системе отсчета ЦМ замкнутой системы либо движется прямолинейно и равномерно, либо покоится.

Ну, а если система не замкнута? Тогда на каждую частицу системы действуют и внутренние и внешние силы. Однако можно показать, что действие внутренних сил не влияет на движение системы как целого и ЦМ системы движется лишь под действием внешних сил. Таким образом, имеется полное совпадение в поведении ЦМ системы и материальной точки той же массы под действием той же силы. Но, как мы знаем, движение материальной точки прекрасно описывается вторым законом Ньютона. Значит, столь же хорошо этот закон может помочь и в описании движения ЦМ.

Пусть за время Δt скорость ЦМ изменилась на $\Delta\vec{v}_C$ под действием равнодействующей $\vec{F}$ внешних сил. Тогда изменение импульса системы $\Delta\vec{p} = M\Delta\vec{v}_C$ связано с действием внешних сил $\vec{F}$ вторым законом Ньютона:

$$\Delta\vec{p} = \vec{F}\Delta t. \qquad (8)$$

Это выражение можно переписать иначе:

$$\vec{F} = M\frac{\Delta\vec{v}_C}{\Delta t}, \text{ или } \vec{F} = M\vec{a}_C, \qquad (9)$$

где $\vec{a}_C$ – ускорение ЦМ системы. Таким образом, нами получена теорема о движении ЦМ, которую иногда называют вторым законом Ньютона для системы материальных точек; она содержит главную информацию, необходимую для описания движения системы:

В инерциальной системе отсчета центр масс системы материальных точек движется так, будто в нем сосредоточена вся масса системы и к нему приложены все внешние силы.

В зависимости от условия задачи ЦМ системы может оставаться неподвижным, но может и двигаться различным образом. Рассмотрим эти его возможности на примерах решения конкретных задач.

Неподвижный ЦМ

Задача 1. *Тележка длиной $l = 5$ м стоит на гладких рельсах. На противоположных концах тележки стоят два мальчика. Масса тележки $M = 75$ кг, массы мальчиков $m_1 = 45$ кг и $m_2 = 30$ кг. Мальчики меняются местами. На какое расстояние Δl переместится при этом тележка?*

Решение. Действия внешних сил на систему, состоящую из тележки и мальчиков, скомпенсированы, поэтому ее ЦМ при движении тел не изменит своего положения. Направим ось x горизонтально и выберем за начало координат (точка 0) центр масс тележки (точка M), совпадающий с ее геометрическим центром (рис.2). Определим по формуле (1)

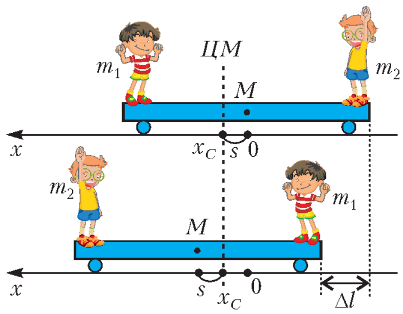

Рис. 2

координату ЦМ системы до начала движения:

$$x_C = \frac{m_1 l/2 - m_2 l/2}{M + m_1 + m_2} = \frac{l}{2}\frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2}.$$

Таким образом, центр тележки M в начальный момент находится справа от ЦМ системы на расстоянии s, равном x_C. После того, как мальчики поменяются местами, точка M окажется слева от ЦМ на таком же расстоянии. Следовательно, искомое перемещение тележки вдвое больше s:

$$\Delta l = 2x_C = l\frac{m_1 - m_2}{M + m_1 + m_2} = 0{,}5 \text{ м}.$$

Прийти к тому же ответу можно было, используя более формальный подход. Для этого следовало найти проекции на ось x перемещений тел массами m_1, m_2 и $m_3 = M$, а затем использовать формулу (3) перемещения ЦМ с учетом того, что оно в данном случае равно нулю:

$$s_{Cx} = \frac{-m_1(l - \Delta l) + m_2(l + \Delta l) + M\Delta l}{m_1 + m_2 + M} = 0.$$

Отсюда сразу получим тот же ответ, что и при первом способе решения.

Неподвижность координаты ЦМ относительно какой-либо оси

Задача 2 (МФТИ, 2004). *Брусок в форме прямоугольного параллелепипеда находится на гладкой горизонтальной поверхности стола (рис.3). На бруске укреплены ступенчатый блок с радиусами шкивов r и $R = 3r$ и вертикальная штанга AC. На шкивы намотаны легкие нити, прикрепленные к грузам массами m и $4m$. Масса бруска $2m$. Груз массой m может скользить вдоль штанги AC. Вначале груз массой $4m$ удерживали в покое. При этом груз массой m находился на расстоянии $H = 14$ см от стола. Затем грузы отпустили. Брусок и грузы стали двигаться поступательно, их скорости оказались в одной и той же вертикальной плоскости. На какое расстояние сместится брусок к моменту удара груза массой m о стол? При ударе другой груз не достигает блока. Массами блока и штанги пренебречь.*

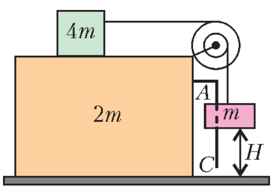

Рис. 3

Решение. Это практически та же задача, что и предыдущая. Посмотрим, в чем состоят небольшие изменения и как они влияют на ход решения. 1) Тележку заменили на брусок, мальчиков – на грузы. При этом грузы, конечно, перестали иметь возможность двигаться за счет отталкивания от бруска, но внутренние силы, как мы знаем, не влияют на движение системы как целого. 2) Груз массой m может двигаться по вертикали, а по горизонтали он «привязан» к бруску: их перемещения в этом направлении одинаковы. Движение по вертикали не влияет на изменение горизонтальной координаты груза. 3) Наличие ступенчатого блока в условии лишь немного осложняет расчеты: нужно учесть, что пока груз массой m опустится по вертикали на H, груз массой $4m$ проедет относительно бруска втрое большее расстояние $3H$. Важно, что главная физическая суть задачи осталась той же: в горизонтальном направлении внешние силы на систему не действуют, поэтому координата x ЦМ системы останется неизменной. А дальше поступим так же, как в задаче 1.

Направим ось x влево и найдем перемещения тел за время их движения: брусок вместе с грузом массой m сместятся влево на Δl, а груз массой $4m$ – вправо на $3H - \Delta l$. Приравняем к нулю перемещение ЦМ системы:

$$s_{Cx} = \frac{-4m(3H - \Delta l) + 2m\Delta l + m\Delta l}{4m + 2m + m} = 0.$$

Отсюда получим ответ: брусок сместится влево на расстояние

$$\Delta l = \frac{12}{7}H = 24 \text{ см}.$$

Задача 3 (МФТИ, 1999). *Тележка может двигаться прямолинейно, поступательно, без трения по горизонтальной поверхности стола. К тележке прикреплена горизонтальная ось O, перпендикулярная возможному направлению движения тележки (рис.4). Вокруг оси O в плоскости, перпендикулярной ей, может вращаться без трения на стержне длиной L небольшой по размерам шарик массой m. Масса тележки, оси O и ее крепления равна $4m$. Массами стержня и колес тележки пренебречь. Вначале тележка покоилась, а стержень удерживали под углом β к вертикали. Затем стержень отпустили.*

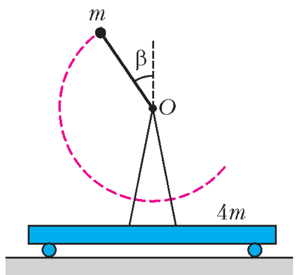

Рис. 4

1) Найдите скорость u тележки при прохождении шариком нижней точки своей траектории.

2) Найдите амплитуду A колебаний тележки, т.е. половину расстояния между наиболее удаленными друг от друга положениями тележки.

Решение. Это еще одна во многом похожая на предыдущие задача. Заметим однако, что в ней имеется два вопроса, причем наша ВП работает, главным образом, при ответе на второй из них. Но начнем все же с первого вопроса.

Снова горизонтальное направление выделено тем, что вдоль него внешние силы не действуют, а значит, импульс системы в этом направлении остается в любой момент времени таким же, каким был вначале: равным нулю. Скорость шарика v направлена в нижней точке вправо, тележка при этом движется влево со скоростью u. По закону сохранения импульса,

$$0 = mv - 4mu.$$

Так как трение в системе отсутствует, то, по закону сохранения механической энергии,

$$mgL(1+\cos\beta) = \frac{mv^2}{2} + \frac{4mu^2}{2}.$$

Решая совместно систему двух уравнений, определим искомую скорость тележки:

$$u = \sqrt{\frac{gL(1+\cos\beta)}{10}}.$$

При ответе на второй вопрос иногда допускают ошибку, неверно полагая, что в начальный момент времени шарик находится в крайнем левом положении, а тележка – в крайнем правом. На это предположение наталкивает казалось бы разумная аналогия с первой задачей. Допустим, что в задаче 1 по тележке движется только первый мальчик, который стоит слева; второй мальчик при этом остается неподвижным относительно тележки. Заметим, что первый мальчик все время от начала движения перемещается вправо, пока не дойдет до противоположного края тележки. А при движении шарика изменение его горизонтальной координаты происходит иначе: сначала он смещается влево, пока стержень не примет горизонтальное положение, и лишь затем начинает смещаться вправо. Именно в тот момент, когда стержень горизонтален, тележка максимально смещена вправо. Таким образом, в то время как тележка смещается в одну сторону от ЦМ системы на A, шарик по горизонтали смещается в другую на $L - A$. Тогда, по формуле (3),

$$m(L-A) - 4mA = 0,$$

откуда находим амплитуду колебаний тележки:

$$A = \frac{L}{5}.$$

Задача 4. *На концах и в середине невесомого вертикального стержня длиной l укреплены одинаковые шарики массой m каждый (рис. 5,а). Какую скорость будут иметь шарики в момент падения на горизонтальный стол, если нижний шарик не закреплен? Трение между столом и нижним шариком отсутствует.*

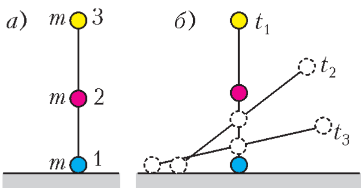

Рис. 5

Решение. Обсудим сначала, что нам достоверно известно о движении каждого шарика (рис.5,*б*).

Нижний шарик будет двигаться по столу, его ускорение определяется проекцией на горизонтальную ось силы упругости, действующей на него со стороны стержня. Очевидно, что движение первого шарика будет происходить с переменным ускорением, поскольку меняются величина и направление этой силы. А вот движение среднего шарика даст нам более ценную информацию. Согласно теореме о движении ЦМ, средний шарик обязан двигаться по вертикали – ведь этот шарик удачно расположился в ЦМ системы. В момент падения средний шарик почти касается поверхности стола, нижний шарик останавливается, а верхний движется по вертикали со скоростью, вдвое большей скорости v среднего шарика. По закону сохранения энергии,

$$mgl + mg\frac{l}{2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{m(2v)^2}{2},$$

откуда находим

$$v = \sqrt{\frac{3}{5}gl}.$$

Теперь можно записать окончательный ответ:

$$v_1 = 0,\ v_2 = v = \sqrt{\frac{3}{5}gl},\ v_3 = 2v = 2\sqrt{\frac{3}{5}gl}.$$

Равномерное движение ЦМ

Если действие внешних сил на систему скомпенсировано, то ее ЦМ не обязательно покоится. Он может двигаться равномерно и прямолинейно относительно инерциальной системы отсчета, связанной с землей (эту систему отсчета часто называют лабораторной – ЛСО). В таких случаях полезно рассмотреть упрощенный вид движения в системе отсчета центра масс – СЦМ. Упрощение достигается, главным образом, за счет того, что в СЦМ два взаимодействующих тела имеют одинаковые по модулю и противоположно направленные векторы импульсов. При взаимодействии тела изменяют свои импульсы так, что их модули по-прежнему оказываются равными друг другу. В самом конце решения для получения верного ответа нужно только не забыть вернуться в исходную систему отсчета.

Задача 5 (ЕГЭ). *Снаряд массой m = 4 кг, летящий со скоростью v = 400 м/с, разрывается на две равные части, одна из которых летит в направлении движения снаряда, а другая – в противоположную сторону. В момент разрыва суммарная кинетическая энергия осколков увеличилась на величину ΔE = 0,5 МДж. Определите скорость осколка, летящего по направлению движения снаряда.*

Решение. В СЦМ снаряд в момент разрыва покоится, поэтому после разрыва осколки одинаковой массы $m/2$ полетят в противоположные стороны с равными по модулю скоростями u, причем их суммарная кинетическая энергия будет равна $2(m/2)u^2/2 = \Delta E$. Отсюда находим скорость каждого осколка в СЦМ:

$$u = \sqrt{\frac{2\Delta E}{m}} = 500 \text{ м/с}.$$

Возвратившись в систему отсчета, связанную с землей, определим скорость первого осколка:

$$u_1 = v + u = v + \sqrt{\frac{2\Delta E}{m}} = 900 \text{ м/с}.$$

Задача 6 (МФТИ, 2000). *Вдоль прямолинейной горизонтальной спицы могут скользить без трения две муфты. В начальный момент муфта массой m с прикрепленной к ней легкой пружиной жесткостью k движется со скоростью v_0, а муфта массой $4m$ покоится (рис.6). Определите скорость муфты массой $4m$ после ее отрыва от пружины и время контакта этой муфты с пружиной. Размеры муфт много меньше длины пружины.*

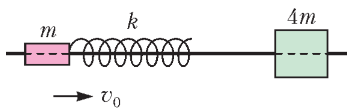

Рис. 6

Решение. Вновь имеем дело с компенсацией внешних сил, действующих на систему. Следовательно, ЦМ движется относительно земли с постоянной скоростью. Определяем эту скорость по формуле (5):

$$v_C = \frac{mv_0}{m+4m} = \frac{v_0}{5}.$$

С такой же по модулю скоростью в СЦМ движется влево муфта массой $4m$ до столкновения с пружиной. После отскока от нее муфта движется вправо со скоростью $v_0/5$. Перейдя в СО, связанную с землей, определим искомую скорость муфты после ее отрыва от пружины:

$$v_2 = \frac{2v_0}{5}.$$

Для определения времени контакта правой муфты с пружиной заметим, что ЦМ – это единственная точка системы, которая неподвижна в СЦМ. Следовательно, движение каждой муфты аналогично колебательному движению груза, прикрепленного к горизонтальной пружине, другой конец которой неподвижен (можно считать, что он закреплен в ЦМ системы). Тогда получается, что правая муфта оказывается прикрепленной к той части пружины, длина которой в 5 раз меньше ее полной длины. Поэтому правая муфта будет колебаться под действием пружины жесткостью $5k$. Время контакта пружины и муфты равно половине периода колебаний, т.е.

$$\tau = \frac{T}{2} = \pi\sqrt{\frac{4m}{5k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{5k}}.$$

Абсолютно упругий удар

Задача 7. *Два шара одинаковых радиусов движутся по гладкой горизонтальной поверхности (рис.7). Массы шаров m_1 и m_2, их скорости $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ направлены по линии центров шаров. Определите скорости шаров после их абсолютно упругого удара.*

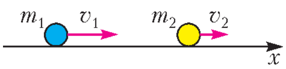

Рис. 7

Решение. В системе отсчета, связанной с землей, абсолютно упругое столкновение тел обычно исследуется с помощью законов сохранения импульса и энергии:

$$m_1v_{1x} + m_2v_{2x} = m_1v'_{1x} + m_2v'_{2x},$$

$$\frac{m_1v_{1x}^2}{2} + \frac{m_2v_{2x}^2}{2} = \frac{m_1v_x'^2}{2} + \frac{m_2v_{2x}'^2}{2}.$$

Мы же снова будем решать задачу, используя переход в СЦМ. Причем в нашем случае индекс x всюду можно будет опустить. Определим сначала скорость ЦМ системы по формуле (5):

$$v_C = \frac{m_1v_1 + m_2v_2}{m_1 + m_2}.$$

Тогда скорость первого шара в СЦМ равна

$$u_1 = v_1 - v_C = \frac{m_2(v_1 - v_2)}{m_1 + m_2}.$$

Мы знаем, что в СЦМ полный импульс системы равен нулю, поэтому шары движутся навстречу друг другу с одинаковыми по модулю импульсами p. Что же будет после их лобового столкновения? Понятно, что шары станут удаляться друг от друга, и снова модули их импульсов p' окажутся равными. Причем закон сохранения энергии запрещает все другие возможности, кроме $p = p'$. Поэтому при абсолютно упругом лобовом столкновении двух тел в СЦМ они меняют только направление своих скоростей на противоположные; модули скоростей у каждого из тел при этом остаются прежними.

Итак, мы выяснили, что скорость первого шара после соударения в СЦМ будет равна

$$u'_1 = -u_1 = \frac{m_2(v_2 - v_1)}{m_1 + m_2}.$$

Чтобы найти конечную скорость первого шара в ЛСО, нужно к этой скорости прибавить скорость ЦМ системы:

$$v'_1 = u'_1 + v_C = \frac{2m_2v_2 + (m_1 - m_2)v_1}{m_1 + m_2}.$$

Конечную скорость v'_2 второго шара определим, используя замену $m_1 \to m_2$ и $m_2 \to m_1$, основанную на симметрии условия:

$$v'_2 = u'_2 + v_C = \frac{2m_1v_1 + (m_2 - m_1)v_2}{m_1 + m_2}.$$

Задача 8 (ЕГЭ). *Два шарика, массы которых отличаются в 3 раза, висят, соприкасаясь, на вертикальных нитях (рис.8). Легкий шарик отклоняют на угол 90° и отпускают без начальной скорости. Каким будет отношение кинетических энергий тяжелого и легкого шариков тотчас после их абсолютно упругого центрального удара?*

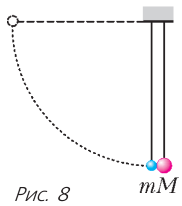

Рис. 8

Решение. В подобных случаях решение обычно разбивают на два этапа: 1) движение первого шарика до столкновения со вторым; 2) процесс соударения шариков.

Начнем с рассмотрения второго этапа. Определим сначала скорость ЦМ:

$$v_C = \frac{mv}{m + 3m} = \frac{v}{4}.$$

Значит, в СЦМ легкий шарик движется перед ударом вправо со скоростью $3v/4$, а тяжелый движется влево со скоростью $v/4$. После удара их скорости в СЦМ изменят направление на противоположные, не изменив при этом своего модуля. (Рекомендуем читателям сделать поясняющие рисунки.) Вернемся теперь в СО, связанную с землей. В ней после соударения скорость легкого шарика равна по модулю $v/2$ и направлена влево, а скорость тяжелого также равна $v/2$, но направлена вправо. Следовательно, искомое отношение кинетических энергий тяжелого и легкого шариков после удара равно отношению их масс, т.е. трем.

Итак, мы смогли получить верный ответ в задаче, даже не приступив к первому этапу решения. Иными словами, данные об отклонении нити с легким шариком на 90° нам не пришлось использовать, они оказались лишними. К такому же ответу мы пришли бы при любом другом угле отклонения!

Задача 9. *В момент наибольшего сближения частиц при упругом лобовом столкновении их скорости одинаковы и равны v. Каковы скорости частиц после разлета, если до столкновения они двигались со скоростями v_1 и v_2?*

Решение. В момент наибольшего сближения относительная скорость частиц равна нулю, а в ЛСО они движутся в этот момент со скоростью ЦМ. Таким образом, скорость ЦМ нам известна из условия задачи. Перейдем теперь в СЦМ. До столкновения скорости частиц в ней равны $v_1 - v$ и $v_2 - v$. Мы уже знаем, что в в результате лобового удара скорости частиц просто меняют свои направления на противоположные, а их модули остаются прежними. Следовательно, после удара скорости частиц равны $v - v_1$ и $v - v_2$. Остается лишь вернуться в ЛСО. Для этого прибавим к каждой из скоростей, найденных в СЦМ, скорость самого ЦМ, т.е. v. В результате имеем

$$v'_1 = 2v - v_1 \text{ и } v'_2 = 2v - v_2.$$

На примере этой задачи прекрасно видна работа нашей ВП! Для сравнения предлагаем читателям самостоятельно решить эту задачу с помощью законов сохранения импульса и энергии.

Рис. 9

Задача 10. *На гладком столе лежит пробирка длиной L и массой M (рис.9). Шарик массой m влетает в пробирку, упруго соударяется с дном и вылетает из пробирки. Найдите путь, который пройдет пробирка к моменту вылета из нее шарика.*

Решение. Пусть шарик влетает в пробирку со скоростью v_0. Для определения пройденного пробиркой пути нужно знать ее скорость v_2' после столкновения и время движения t, пока шарик находится внутри нее. Обе величины легко находятся, если использовать СЦМ, движущуюся со скоростью $v_C = \dfrac{mv_0}{M+m}$ относительно земли. В этой системе отсчета относительная скорость шарика и пробирки не меняется при столкновении, оставаясь равной v_0. Следовательно, шарик вылетит из пробирки через время $t = L/v_0$ после соударения с ней. За это время пробирка пройдет в ЛСО путь $l = v_2't$, где

$$v_2' = u_2' + v_C = \frac{mv_0}{M+m} + \frac{mv_0}{M+m} = \frac{2mv_0}{M+m}$$

– скорость пробирки относительно земли. Таким образом, пройденный пробиркой путь равен

$$l = v_2't = \frac{2m}{M+m}L\,.$$

Задача 11 (МФТИ, 1985). *Протон, пролетая мимо первоначально покоившегося ядра неизвестного химического элемента, отклонился на угол α ($\cos\alpha = 4/15$), потеряв 10% своей скорости (рис. 10). Найдите массовое число химического элемента.*

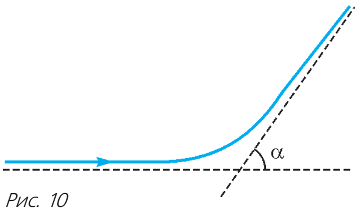

Рис. 10

Решение. В данном случае происходит *нелобовое* столкновение частиц. Обозначим массу ядра M, а массу протона m. Проанализируем процесс столкновения в СЦМ. Ядро движется в ней со скоростью ЦМ:

$$u_2 = v_C = \frac{mv}{M+m}\,,$$

протон движется навстречу ядру со скоростью

$$u_1 = v - v_C = \frac{Mv}{M+m}\,.$$

После столкновения частиц их импульсы поворачиваются, оставаясь равными по модулю и противоположными по направлению. Другими словами, и протон и ядро сохраняют модули своих скоростей при ударе, изменив на одинаковые углы направления векторов скоростей. Это схематически показано на рисунке 11, где $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ – скорости протона и ядра до удара, $\vec{u}_1'$, $\vec{u}_2'$ – их скорости после удара. Теперь на рисунке 12 изобразим взаимное расположение векторов конечных скоростей протона в ЛСО и в СЦМ. Для них выполняется закон сложения скоростей:

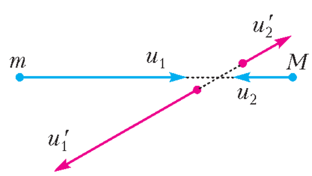

Рис. 11

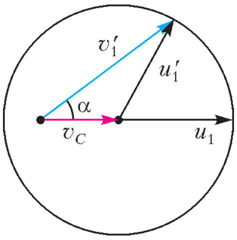

Рис. 12

$$\vec{v}_1' = \vec{v}_C + \vec{u}_1'\,.$$

По теореме косинусов (в которой мы учли, что $u_1' = u_1$),

$$u_1^2 = v_C^2 + v_1^2 - 2v_Cv_1\cos\alpha\,,$$

или

$$\left(\frac{Mv}{M+m}\right)^2 = \left(\frac{mv}{M+m}\right)^2 + (0{,}9v)^2 - 2\frac{mv}{M+m}\cdot 0{,}9v\cdot\frac{4}{15}\,.$$

Введя замену $n = M/m$, преобразуем это выражение и получим квадратное уравнение

$$0{,}19n^2 - 1{,}14n - 1{,}33 = 0\,.$$

Отсюда находим, что $n = 7$. Таким образом, протон столкнулся с ядром лития.

Представим себе теперь обратную ситуацию – пусть ядро лития налетает на неподвижный протон. Что принципиально изменится в физической картине, описывающей соударение частиц? Когда было неподвижно ядро лития, налетавший протон мог отклониться на любой угол, вплоть до $180°$. Теперь же налетает более тяжелая частица на неподвижную легкую, значит, отклониться от первоначального направления она может уже не на любой угол. Величина угла ограничена отношением масс взаимодействующих частиц. Попробуем решить задачу в общем виде.

Задача 12. *Каким может быть максимальный угол рассеяния налетающей частицы массой M при абсолютно упругом столкновении с покоящейся частицей массой m < M?*

Решение. Закономерности столкновения остаются в СЦМ теми же, что и в предыдущей задаче. Однако теперь другое соотношение между модулями скорости u_1 налетающей частицы и скорости v_C ЦМ: $u_1 < v_C$. Поэтому геометрически картина выглядит иначе (рис.13). Из рисунка видно, что конец вектора $\vec{v}_1'$ перемещается по окружности радиусом u_1 с центром в конце вектора $\vec{v}_C$. Максимальный угол α_{max} между векторами $\vec{v}_1'$ и $\vec{v}_C$ соответствует касательной к окружности, при этом

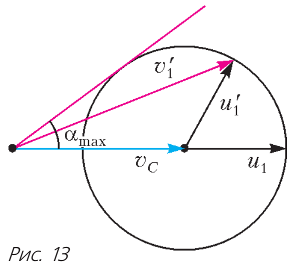

Рис. 13

$$\sin\alpha_{max} = \frac{u_1'}{v_C} = \frac{u_1}{v_C} = \frac{m}{M}\,.$$

Для ядра лития и протона отношение масс равно $m/M = 1/7$, поэтому

$$\alpha_{max} = \arcsin\frac{1}{7} \approx 8°\,.$$

Таким образом, ядро лития после соударения с неподвижным протоном не сможет отклониться от первоначального направления движения более чем на $8°$.

ЦМ движется равноускоренно

Задача 13 (МФТИ, 1985, олимпиада). *С поверхности земли бросили вертикально вверх кусочек пластилина со скоростью v_0. Одновременно такой же кусочек пластилина начал падать без начальной скорости с высоты H. При столкновении кусочки слиплись. Через какое время t после начала бросания и с какой скоростью v слипшийся комок упадет на землю?*

Решение. Если пытаться идти традиционным путем, рассматривая движение тел относительно земли, то решение задачи оказывается сопряженным с большими трудностями.

Действительно, в этом случае нужно записать уравнения движения тел до столкновения, закон сохранения импульса при столкновении и уравнение движения слипшегося куска. Ясно, что прийти к ответу быстро не получится. Зато наша ВП может работать на всю мощь! Смотрите, как легко решается задача, если пользоваться понятием ЦМ системы.

Очевидно, что в начальный момент ЦМ системы находится на высоте $H_{C0} = H/2$, а его скорость направлена вверх и равна $v_{C0} = v_0/2$. На систему действует только одна внешняя сила – сила тяжести. Поэтому ЦМ движется с ускорением, модуль которого равен g. Тогда конечная скорость ЦМ, а значит и комка в целом, может быть найдена с помощью кинематической формулы в одну строчку:

$$v = \sqrt{\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 + 2g\frac{H}{2}} = \sqrt{\frac{v_0^2}{4} + gH}\ .$$

Так же просто определяем время движения, используя формулу перемещения при равноускоренном движении:

$$-\frac{H}{2} = \frac{v_0}{2}t - \frac{gt^2}{2}\ .$$

Преобразовав ее к квадратному уравнению, находим

$$t = \frac{1}{2g}\left(v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4gH}\right).$$

Задача 14. *Два небольших шарика, массы и заряды которых одинаковы, находятся на одной вертикали на высотах h_1 и h_2. Шарики бросают в одну сторону в горизонтальном направлении с одинаковыми скоростями v. Первый шарик косается земли на расстоянии L от вертикали бросания. На какой высоте H_2 в этот момент находится второй шарик? Сопротивлением воздуха и влиянием индуцированных на земле зарядов пренебречь.*

Решение. Попытки решать эту задачу «в лоб», скорее всего, едва ли достигнут успеха. Действительно, вдобавок к постоянной по направлению и величине силе тяжести на каждый шарик действует еще очень неприятная кулоновская сила. Неприятная в том смысле, что она меняется обратно пропорционально квадрату расстояния между шариками, а значит, их движение будет происходить с переменным ускорением. А вот используя теорему о движении ЦМ, мы достаточно быстро приходим к верному ответу.

Итак, ЦМ системы в начальный момент находится на высоте $h_C = (h_1 + h_2)/2$ и имеет начальную скорость v. На систему действует только одна внешняя сила – сила тяжести, поэтому ЦМ будет двигаться по параболе (рис.14). При этом время движения легко найти, зная, что при равномерном движении по оси x ЦМ пройдет расстояние $L = vt$, а высота ЦМ в момент падения будет равна

$$H_C = h_C - \frac{gt^2}{2} = \frac{h_1 + h_2}{2} - \frac{gL^2}{2v^2}\ .$$

Теперь уже совсем просто найти высоту H_2 второго шарика:

$$H_2 = 2H_C = h_1 + h_2 - \frac{gL^2}{v^2}\ .$$

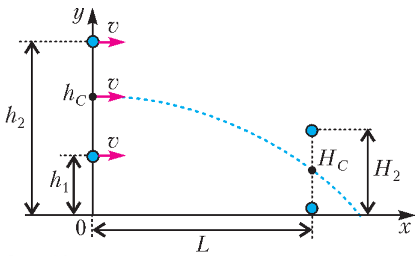

Рис. 14

ЦМ движется по окружности

Задача 15 (МФТИ, 2014). *Тонкая изогнутая трубка с одним горизонтальным коленом и двумя вертикальными коленами укреплена на платформе, вращающейся вокруг вертикальной оси (рис.16). Вертикальные колена находятся на расстояниях $x_1 = 15$ см и $x_2 = 25$ см от оси вращения. Установившаяся разность уровней налитой в трубку воды оказалась равной $\Delta h = 10$ см. Найдите угловую скорость ω вращения платформы.*

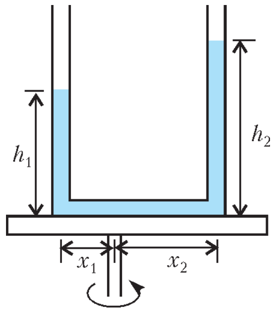

Рис. 15

Решение. Рассмотрим движение воды, заполняющей горизонтальное колено трубки. Ее масса равна $m = \rho S(x_1 + x_2)$, где ρ – плотность воды, S – площадь сечения горизонтального колена. ЦМ этого цилиндра движется по окружности радиусом $\frac{x_2 - x_1}{2}$ с ускорением $a = \omega^2\frac{x_2 - x_1}{2}$. Со стороны окружающей жидкости на торцы цилиндра действуют в горизонтальном направлении силы, равные p_1S и p_2S, где $p_1 = p_0 + \rho g h_1$, $p_2 = p_0 + \rho g h_2$ и $p_2 - p_1 = \rho g\Delta h$. Запишем теперь уравнение второго закона Ньютона: $ma = p_2S - p_1S$. Отсюда находим угловую скорость вращения платформы:

$$\omega = \sqrt{\frac{2g\Delta h}{x_2^2 - x_1^2}}\ .$$

Упражнения

1. Человек захотел спуститься по веревочной лестнице из свободно висящего аэростата массой 400 кг. Какой минимальной длины веревочную лестницу он должен привязать к гондоле аэростата, чтобы, ступая на последнюю ступеньку, коснуться земли? Масса человека 80 кг. Расстояние от земли до аэростата в начальный момент времени 10 м.

2. На гладком горизонтальном столе лежат один за другим три шара одного и того же радиуса, не касаясь друг друга: первый массой $2m$, второй массой m и третий массой $m/2$. Первому шару сообщают скорость $v_0 = 9$ м/с, направленную по прямой, проходящей через центры всех трех шаров. Первый шар налетает на второй, а второй налетает на третий. Найдите скорость третьего шара после удара со вторым шаром. Все удары – абсолютно упругие.

3. На концах и в середине невесомого жесткого вертикального стержня длиной L укреплены маленькие шарики 1, 2, 3 равного объема, массы которых m, $2m$ и $3m$, а заряды $+3q$, $+2q$, $+q$ соответственно (рис.16). В пространстве, где находятся шарики, создано однородное электрическое поле напряженностью E, силовые линии которого направлены вертикально вниз. Какую скорость будет иметь второй шарик в момент падения на горизонтальную поверхность? Силами трения и влиянием индуцированных на горизонтальной поверхности зарядов пренебречь.

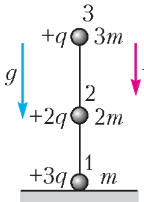

Рис. 16

4. На абсолютно гладкой горизонтальной плоскости лежит обруч. На обруче находится жук. Какую траекторию будут описывать жук и центр обруча, если жук начнет двигаться вдоль обруча? Масса обруча M, его радиус R, масса жука m.

5. Тонкий однородный стержень массой 0,5 кг и длиной 1 м вращается в вертикальной плоскости вокруг горизонтальной оси, проходящей через один из его концов. В нижнем положении скорость другого конца стержня равна 4 м/с. С какой силой действует стержень в этот момент на ось вращения?

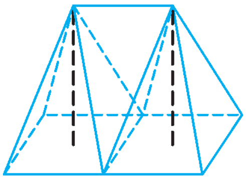

Рис. 4

5. 8.

Проведем линии так, как показано на рисунке 4. Тогда боковая поверхность большой палатки состоит из восьми одинаковых треугольников (они равны по трем сторонам), что в два раза больше, чем у простой палатки. На дно большой палатки ушло ткани тоже в два раза больше, потому что оно состоит из двух квадратов, равных дну простой палатки.

КУЛИНАРНЫЕ ИССЛЕДОВАНИЯ

1. В восемь раз. Например, если в холодильнике борщ остается свежим в течение четырех суток, то летом на кухне он скиснет за двенадцать часов.

2. В организме обычно существуют очаги инфекции, которые защитные силы организма не могут уничтожить полностью, а могут лишь блокировать. При таком «мире» активность микроорганизмов сдерживается активностью защитных сил организма. При изменении температуры активность и микроорганизмов, и организма изменяются согласно указанному закону, но с разными значениями коэффициента k (у защитных сил организма его значение больше). Поэтому при повышении температуры сильнее становятся защитные механизмы нашего организма, и мы выздоравливаем. При переохлаждении, наоборот, инфекция берет реванш – мы простужаемся.

3. Вся вода выкипела, после чего температура начала быстро расти.

4. Чайник сгорит, если в нем выкипит вся вода. Время выкипания чайника равно $t_2 = \frac{r}{c\Delta t}t_1$, где t_1 – время закипания, c – удельная теплоемкость воды, r – удельная теплота парообразования воды, $\Delta t = 80\ °\text{C}$. Для наших данных $t_2 = 100$ мин. Значит, у Матвея достаточно времени, чтобы сходить к Лизе и отдать учебник. Главное, чтобы он не любезничал с ней более 65 минут.

5. При солении кипящего борща жидкость вскипает. Причина та же, что и в рассказе о неопытном стажере. Брошенная соль – это не только кристаллики соли, но и большое количество воздушных пузырьков, которые, попав в кипящую воду, мгновенно вырастают.

ПЕРПЕНДИКУЛЯРЫ И ЕЩЕ ОДИН ПРИЗНАК ВПИСАННОГО ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКА

3. *Указание.* Эти точки лежат на окружности с диаметром OP, где O – центр данной окружности.

4. *Указание.* Рассмотрите точку O (центр окружности) и примените утверждение задачи 1.

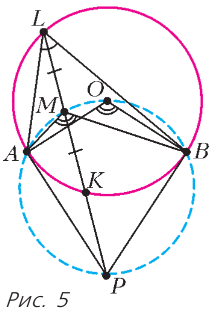

Рис. 5

5. а) $\angle BMA = \angle BOA$ (см. задачу 2); $\angle BLA$ и $\angle BOA$ – соответственно вписанный и центральный углы одной окружности, значит, $2\angle BLA = \angle BOA$ (рис. 5).

б) Углы $\angle BEA$ и $\angle BLA$ равны как вписанные. Значит, (по предыдущему пункту) $2\angle BEA = \angle BMA$. Угол $\angle BMA$ опирается на дугу APB, причем P – середина дуги AB, следовательно, опирающийся на дугу BP вписанный угол $\angle BMP$ в 2 раза меньше угла $\angle BMA$. Значит, $\angle BEA = \angle BMP$. Таким образом, прямые BM и BE имеют общую точку и пересекают пару параллельных прямых AE и PM под равными углами – а значит, эти прямые совпадают и прямая BE проходит через M – середину KL (рис. 6).

7. *Указание.* Рассмотрите проекции точки M на перпендикуляры, опущенные из O на стороны многоугольника.

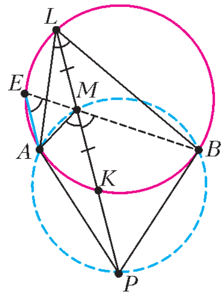

Рис. 6

8. *Указание.* Центр масс концов хорд совпадает с центром масс середин этих хорд.

11. *Указание.* Примените утверждение предыдущей задачи для треугольника BHC, где H – ортоцентр треугольника ABC.

12. Это точка пересечения медиан треугольника ABC.

14. Применим результат предыдущей задачи. Пусть длины высот треугольника равны h_a, h_b, h_c, радиус вписанной окружности равен r. Достаточно доказать, что

$$\frac{h_a - 2r}{h_a} + \frac{h_b - 2r}{h_b} + \frac{h_c - 2r}{h_c} = 1.$$

Преобразуем:

$$\frac{1}{h_a} + \frac{1}{h_b} + \frac{1}{h_c} = \frac{1}{r}.$$

Домножим обе части на площадь треугольника ABC, получим равенство $a/2 + b/2 + c/2 = p$ (где p – полупериметр треугольника ABC), справедливость которого очевидна.

15. *Указание.* Отрезки I_aA, I_bB, I_cC – высоты треугольника $I_aI_bI_c$, а I – его ортоцентр.

16. *Указание.* Точки A_2, B_2 и C_2 – проекции ортоцентра треугольника ABC на высоты треугольника $A_1B_1C_1$.

21. *Указание.* Применив утверждение об угле между хордой и касательной, можно получить, что $\angle AA_0C = \angle AA_0B = 180° - \angle BAC$. Но это же условие выполнялось и для точки P в предыдущей задаче. Осталось доказать, что точка с таким свойством единственна.

22. *Указание.* Из двух предыдущих задач ясно, что A_0, B_0, C_0 – проекции центра описанной окружности O на симедианы AL, BL, CL соответственно. Значит, точки A_0, B_0, C_0 лежат на окружности с диаметром OL.

25. *Указание.* Задача решается аналогично предыдущей. Центр A круга, полученного при сечении шара плоскостью α, – проекция центра O шара на эту плоскость.

26. *Указание.* Эта пирамида вписана в сферу.

27. а) *Указание.* Центр масс концов хорд совпадает с центром масс середин этих хорд. Эти три середины лежат в вершинах прямоугольного параллелепипеда, противоположные вершины которого – центр сферы и точка A.

б) *Указание.* Эти 15 прямых разбиваются на 5 групп, в каждой из которых 3 прямые попарно перпендикулярны.

ВП ПО ИМЕНИ ЦЕНТР МАСС

1. $l_{\min} = 12$ м. **2.** $v_3 = 16$ м/с. **3.** $v_2 = \sqrt{\frac{2}{7}L\left(2g + \frac{qE}{m}\right)}$.

4. И жук и центр обруча будут двигаться по окружностям, радиусы которых равны

$$R_1 = \frac{MR}{M+m} \text{ и } R_2 = \frac{mR}{M+m}$$

соответственно.

5. $F = 9$ Н.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЙ ЭТАП XLI ВСЕРОССИЙСКОЙ ОЛИМПИАДЫ ШКОЛЬНИКОВ ПО МАТЕМАТИКЕ

9 класс

1. Из условия следует, что трехчлены $x^2 + ax + b$ и $x^2 + bx + a$ имеют общий корень x_0, а также отличные от него корни x_1 и x_2 соответственно; в частности, $a \neq b$. Тог-