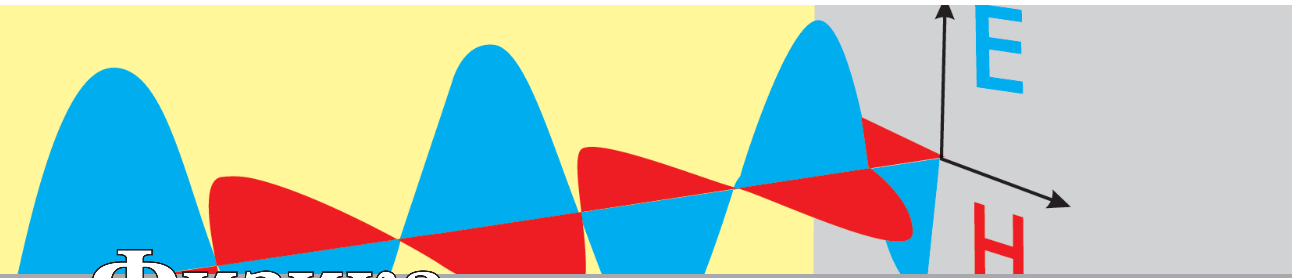

Бондаров Михаил Николаевич
Учитель физики лицея №1501 и
ГОУ ЦО «Технологии обучения» г. Москвы.

Об эффективности энергетических методов в механике

При решении задач на олимпиадах и ЕГЭ важно не только найти верный путь к решению, но и постараться выбрать такой способ, который быстрее всего приводит к правильному ответу. Подобное умение нередко позволяет существенно сократить математические выкладки и время, затраченное на решение задач. В статье на примерах решения задач механики показана эффективность использования энергетического метода.

Введение

Наверное, каждый читатель может припомнить случай, когда он, едва взглянув на рисунок к задаче, уже мысленно представлял возможный дальнейший ход её решения. Так, увидев чертёж, на котором изображено тело на наклонной плоскости, многие сразу же стремятся изобразить силы, действующие на тело, и записать уравнение второго закона Ньютона. Если же в условии заданы, например, начальная скорость и время движения, то автоматически пишутся кинематические уравнения.

Однако не всегда подобного рода подход к решению задачи является оптимальным. В данной статье на примерах решения конкретных задач мы рассмотрим эффективность применения энергетического метода по сравнению с кинематическим и динамическим.

Решение задач

Задача 1. Шар массой m = 0,5 кг, падая с высоты H = 10 м, попадает в снег и пробивает в нём яму глубиной h = 0,8 м. Считая движение в воздухе и в снегу равноускоренным и силу сопротивления воздуха равной $F_{св}$ = 0,6 Н, найдите силу сопротивления $F_{сс}$ при движении в снегу.

Рассмотрим сначала привычный большинству школьников ход решения задачи.

Первый способ решения. Разобьём движение шара на два участка (в воздухе и в снегу). Изобразим на рисунке 1 направления векторов сил тяжести и сопротивления воздуха для каждого участка, направления векторов ускорений и скорости $\vec{v}_1$, являющейся конечной скоростью для первого участка и начальной – для второго. Направим ось x вертикально вниз.

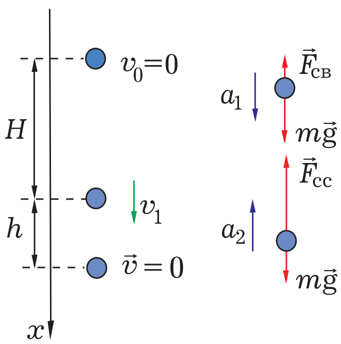

Рис. 1

Запишем для каждого участка уравнение второго закона Ньютона в проекциях на эту ось и кинематическое уравнение для равноускоренного движения:

$$mg - F_{св} = ma_1, \qquad (1)$$

$$H = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a_1}, \qquad (2)$$

$$mg - F_{сс} = -ma_2, \qquad (3)$$

$$h = \frac{v^2 - v_1^2}{-2a_2}. \qquad (4)$$

Физическая часть решения задачи завершена, осталось лишь решить полученную систему уравнений (1) – (4), учитывая, что начальная v_0 и конечная v скорости движения шара равны нулю.

Для этого можно сначала выразить из уравнений (2) и (4) v_1^2 и приравнять правые части:

$$2a_1H = 2a_2h,$$

откуда

$$a_1 = a_2\frac{h}{H}. \qquad (5)$$

Теперь подставим уравнение (5) в (1) и выразим a_2:

$$mg - F_{св} = ma_2\frac{h}{H} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_2 = \frac{H}{h}\left(g - \frac{F_{св}}{m}\right). \qquad (6)$$

И, наконец, подставив (6) в (3), получим искомую силу сопротивления при движении шара в снегу:

$$F_{сс} = m(g + a_2) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow F_{сс} = mg\left(1 + \frac{H}{h}\right) - F_{св}\frac{H}{h} = 60\text{ Н}.$$

Ответ. $F_{сс} = mg\left(1+\frac{H}{h}\right) - F_{св}\frac{H}{h} = 60\text{Н}.$

Мы намеренно проделали весь долгий путь математических преобразований, чтобы показать преимущества энергетического метода решения данной задачи.

Второй способ решения. За время движения шара его полная механическая энергия уменьшается на величину $mg(H+h)$ за счёт работы силы сопротивления воздуха (модуль работы равен $F_{св}H$) и работы силы сопротивления снега (модуль работы равен $F_{сс}h$). Тогда для решения задачи достаточно записать только одно уравнение:

$$mg(H+h) = F_{св}H + F_{сс}h,$$

из которого сразу находим искомую величину.

Задача 2. После оттепели зимой образовалась ледяная горка длиной $L = 15$ м, поверхность которой составляет угол α ($\mathrm{tg}\alpha = 1/6$) с горизонтальной плоскостью. Чтобы ребята на санках не выезжали на проезжую часть дороги, дворник посыпал нижнюю часть горки песком. На какой минимальной длине s поверхности горки надо насыпать песок, чтобы санки не смогли съехать с неё? Коэффициент трения скольжения санок по льду с песком $\mu = 0{,}5$. Трением санок о лёд без песка и начальной скоростью на вершине горки пренебречь.

Эта задача является аналогом предыдущей: с динамической точки зрения движение санок можно также разбить на два этапа, первый из которых – по гладкой горке – происходит равноускоренно с ускорением

$$a_1 = g\sin\alpha, \qquad (7)$$

а второй – равнозамедленно с ускорением, модуль которого

$$a_2 = g(\mu\cos\alpha - \sin\alpha). \qquad (8)$$

Заметим, что при нахождении ускорения a_2 надо быть достаточно внимательным, чтобы не допустить ошибку, написав привычное уравнение $a_2 = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha)$, справедливое лишь при равноускоренном движении по наклонной плоскости. Действительно, записав уравнение второго закона Ньютона на ось x, направленную вдоль наклонной плоскости (рис. 2):

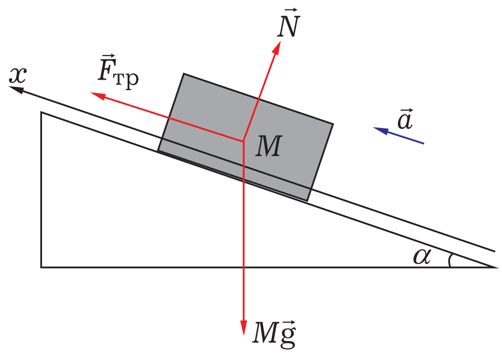

Рис. 2

$$ma_2 = F_{\text{тр}} - mg\sin\alpha,$$

где $F_{\text{тр}} = \mu N = \mu mg\cdot\cos\alpha$, получим уравнение (8).

Теперь осталось лишь записать кинематические уравнения для каждого из участков:

$$L - s = \frac{v^2}{2a_1}, \qquad (9)$$

$$s = \frac{v^2}{2a_2}. \qquad (10)$$

Решив систему уравнений (7) – (10), получим:

$$s = \frac{L}{\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 5 \text{ м}.$$

Ответ. $s = \dfrac{L}{\mu\,\mathrm{tg}\,\alpha} = 5$ м.

Вновь, как и в первой задаче, энергетический метод позволит гораздо быстрее прийти к ответу. Только в данном случае полная механическая энергия уменьшается на величину $mgh = mgL\sin\alpha$ за счёт работы силы трения скольжения, модуль которой равен

$$\mu N\cdot s = \mu mg\cos\alpha\cdot s,$$

$$mgL\sin\alpha = \mu mg\cos\alpha \cdot s,$$

откуда сразу находится искомое расстояние s.

Задача 3. Лыжник массой $m = 60$ кг спустился с горы высотой $h = 20$ м. Какой была сила сопротивления F_c его движению по горизонтальной лыжне после спуска, если он остановился, проехав $l = 200$ м? Считать, что по склону горы он скользил без трения.

Если решать эту задачу динамически, придётся вводить угол наклона горы к горизонту (он, конечно же, потом сократится!), вновь разбивать траекторию движения лыжника на два участка и записывать уравнения для каждого из них. Рекомендуем читателям самостоятельно решить задачу этим способом.

Энергетический подход позволяет гораздо быстрее прийти к конечному результату. Действительно, полная механическая энергия лыжника уменьшилась за время движения на величину, равную mgh, за счёт работы силы трения на горизонтальном участке. Эта работа равна по модулю $F_c l$. Следовательно, можно записать уравнение

$$mgh = F_c l \Rightarrow F_c = \frac{mgh}{l} = 60 \text{ Н}.$$

Ответ. $F_c = \dfrac{mgh}{l} = 60$ Н.

Задача 4. Два тела массы $m =$ $= 240$ г каждое подвешены на концах нити, перекинутой через блок. Какую массу m_0 должен иметь груз, положенный на одно из тел, чтобы каждое из них прошло за время $t =$ $= 4$ с путь $h = 160$ см?

Традиционное решение этой задачи предполагает использование уравнений второго закона Ньютона для каждого тела и кинематической формулы равноускоренного движения, связывающей путь и время.

Закон сохранения механической энергии позволит найти иной подход к решению. Уменьшение потенциальной энергии системы грузов приведёт к возрастанию их кинетической энергии:

$$m_0 gh = \frac{(2m + m_0)v^2}{2}, \qquad (11)$$

где конечная скорость грузов v вдвое больше их средней скорости при равноускоренном движении с нулевой начальной скоростью

$$v = \frac{2h}{t}. \qquad (12)$$

Подставив (12) в (11), определим искомую массу груза

$$m_0 = \frac{4h}{gt^2 - 2h} m = 10 \text{ г}.$$

Ответ. $m_0 = \dfrac{4h}{gt^2 - 2h} m = 10$ г.

Задача 5. В системе, изображённой на рис. 3, трение в блоках и между любыми поверхностями отсутствует. Если грузику массой m позволить двигаться, то за какое время он достигнет подставки массой M? Начальная скорость грузика равна нулю, начальное расстояние от грузика до подставки h, нить невесомая и нерастяжимая.

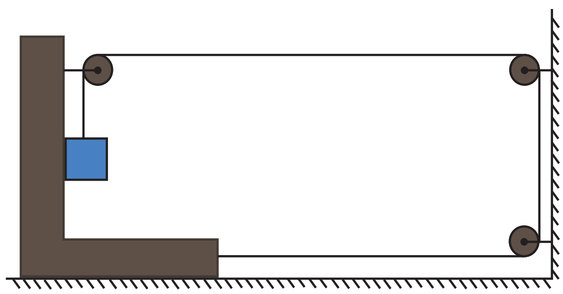

Рис. 3

Заметим, что смещение подставки в горизонтальном направлении на величину Δx приводит к перемещению груза по вертикали на величину $2\Delta x$. Поэтому вертикальная скорость груза v_1 вдвое больше горизонтальной скорости системы v_2:

$$v_1 = 2v_2. \qquad (13)$$

Закон сохранения механической энергии связывает уменьшение потенциальной энергии грузика с увеличением кинетической энергии системы:

$$mgh = \frac{m(v_1^2 + v_2^2)}{2} + \frac{Mv_2^2}{2}. \qquad (14)$$

Здесь $v_1^2 + v_2^2 = v^2$, где v есть скорость грузика относительно стола, по которому движется подставка.

Конечная вертикальная скорость v_1 находится аналогично (12):

$$v_1 = \frac{2h}{t}. \qquad (15)$$

Решая систему уравнений (13) – (15), получим:

$$t = \sqrt{\frac{h(5m+M)}{2mg}}.$$

Ответ. $t = \sqrt{\frac{h(5m+M)}{2mg}}.$

Задача 6. На конец доски поместили груз вдвое большей массы и толкнули оба тела со скоростью v_0 по гладкому столу в направлении вертикальной стенки (рис. 4). Вектор скорости направлен вдоль доски и перпендикулярен стенке. Считая удар доски о стенку абсолютно упругим и мгновенным, а коэффициент трения между грузом и доской равным μ, найдите минимальную длину доски, при которой груз никогда не коснётся стенки.

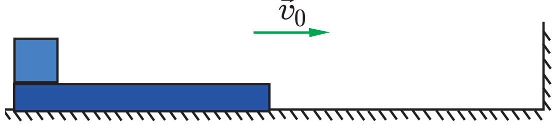

Рис. 4

Рассмотрим движение системы «груз – доска» после удара доски о стенку. Поскольку удар был абсолютно упругим и мгновенным, доска начала двигаться с той же по модулю скоростью v_0, направленной навстречу движению груза. При этом доска и груз будут уменьшать свою скорость за счёт силы трения. Доска по условию вдвое легче, поэтому она остановится в тот момент, когда груз будет ещё продолжать двигаться к стенке. После этого доска начнёт разгоняться силой трения о груз, пока не ударится вновь о стенку. При этом груз относительно доски должен пройти расстояние L_{min} не более её длины L. Таким образом, ясно, что детальное рассмотрение динамики движений тел системы приведёт к записи системы уравнений, которые мы здесь не будем выписывать.

Зато энергетический метод позволяет решить задачу буквально в одну строчку: за всё время движения кинетическая энергия системы уменьшилась до нуля за счёт работы силы трения:

$$\frac{3mv_0^2}{2} = \mu 2mgL_{min},$$

откуда следует, что длина доски должна быть больше L_{min}:

$$L > \frac{3v_0^2}{4\mu g}.$$

Заметим, что в процессе решения работа силы трения скольжения была рассчитана в системе отсчёта, связанной с доской. При этом мы использовали тот факт, что суммарная работа всех сил трения, действующих в системе, не зависит от выбора системы отсчёта, всегда отрицательна и всегда приводит к уменьшению полной механической энергии системы.

Ответ. $L > \frac{3v_0^2}{4\mu g}.$

Задача 7. В системе, изображённой на рисунке 5, трение отсутствует. В начальный момент все тела удерживают, при этом свисающие концы нитей вертикальны, а висящие на них грузы касаются боковых поверхностей кубов. Массы кубов M и $2M$, каждый из грузов имеет массу m, причём $M = 3m$. Систему отпускают. Найдите скорость большого куба в тот момент, когда касающийся его груз ударится о стол. Начальная высота грузов относительно горизонтальной поверхности стола H.

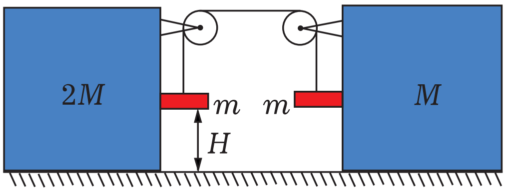

Рис. 5

Прежде всего обратим внимание на то, что на грузы по вертикали действуют одинаковые силы (тяжести и натяжения нити), поэтому их ускорения и конечные скорости по вертикали одинаковы. Таким образом, грузы достигнут поверхности стола одновременно. Кроме того, из закона сохранения импульса можно найти связь между скоростью v_1 куба массой $2M$ и скоростью v_2 куба массой M:

$$0 = (2M + m)v_1 - (M + m)v_2. \quad (16)$$

Из нерастяжимости нити следует, что скорость сокращения горизонтального участка нити равна удвоенной скорости опускающихся грузов, т. е. конечная скорость каждого из грузов равна

$$v = \frac{v_1 + v_2}{2}. \quad (17)$$

Тогда из закона сохранения механической энергии получим:

$$2mgH = \frac{(2M + m)v_1^2}{2} + \frac{(M + m)v_2^2}{2} + 2\frac{mv^2}{2}. \quad (18)$$

Из уравнений (16) – (18) с учётом того, что $M = 3m$, определим искомую скорость:

$$v_1 = 8\sqrt{\frac{2gH}{737}}.$$

Ответ. $v_1 = 8\sqrt{\frac{2gH}{737}}$.

Выводы. Если в задаче на механическое движение тел не требуется детального описания движения, а необходимо лишь связать начальное и конечное состояния исследуемой системы, то для получения быстрого ответа нередко удобнее использовать энергетические соотношения.

Задачи для самостоятельного решения

1. Хоккейная шайба, имеющая начальную скорость 4 м/с, проходит по льду до удара о бортик расстояние 15 м и после упругого удара отскакивает от него. Определите, на какое расстояние отлетит шайба, если коэффициент трения о лёд в обоих случаях равен 0,04. (Ответ: 5 м.)

2. Тело, брошенное с высоты 10 м вертикально вниз со скоростью 4 м/с, погрузилось в грунт на глубину 20 см. Найдите силу сопротивления грунта, если масса тела 2 кг. Силой сопротивления воздуха можно пренебречь. (Ответ: 1,1 кН.)

3. Санки съезжают с горы, длина основания которой 5 м, а высота 2 м, и проезжают до остановки ещё 35 м по горизонтальной площадке. Определите коэффициент трения, считая его одинаковым на всём пути. Участок перехода склона горы в горизонтальную поверхность считайте небольшим и достаточно плавным. Изменение модуля скорости санок на участке перехода можно не учитывать. (Ответ: 0,2.)