Бондаров Михаил Николаевич
Учитель физики лицея №1501 и
ГОУ ЦО «Технологии обучения» г. Москвы.

Использование системы отсчёта, связанной с центром масс, в задачах на столкновение тел

В статьях, опубликованных в журнале «Потенциал» № 3 и 5 за 2013 год, рассматривались упрощавшие решение задач приёмы перехода в другую систему отсчёта (СО) в кинематических и динамических задачах. При этом, как правило, новая СО была связана с одним из двигавшихся тел.

В данной статье на конкретных примерах будет показано, какую роль играет понятие центра масс (ЦМ) в задачах на столкновение тел (иногда столкновение называют ударом, или соударением, или рассеянием). В частности, мы убедимся в том, какие преимущества в решении задач даёт выбор особой СО – системы отсчёта, связанной с центром масс системы (СОЦМ). Этот приём может быть использован в разных случаях, но мы остановимся только на его применении к задачам на столкновение тел.

Введение

Знаменитый популяризатор науки Я.И. Перельман в своей «Занимательной механике» подчёркивал важность изучения явления удара, отмечая при этом: «Было время, когда ударом двух тел стремились объяснить все прочие явления природы». Конечно, те немного наивные с наших нынешних позиций времена давно прошли. Однако и до сих пор умение использовать закономерности удара оказывается необходимо не только в механических процессах, но и, например, в молекулярно-кинетической теории, объясняющей широкий круг таких явлений, как беспорядочное движение множества соударяющихся частиц.

Особую роль при рассмотрении процессов столкновений играет СОЦМ. В ней полный импульс системы равен нулю. Движение в такой системе выглядит проще, поэтому её с успехом используют не только в механике, но даже в ядерной физике.

Мы не будем подробно останавливаться на понятии центра масс и его разнообразных применениях. Желающие изучить материал более основательно могут обратиться к опубликованным ранее в нашем журнале статьям В.И. Чивилёва «Теорема о движении центра масс» («Потенциал» № 9 за 2006 год) и В.Т. Корнеева «Центр масс» («Потенциал» № 2 за 2009 год).

Для наших целей достаточно понимать, что ЦМ существует у любого тела или системы тел. Знание положения ЦМ необходимо во многих далёких друг от друга областях знаний и человеческой деятельности: у любого средства передвижения и в астрофизике, при работе станка и в спортивных состязаниях.

Физический смысл понятия ЦМ таков: ЦМ системы частиц общей массой M движется так, как двигалась бы одна материальная точка массы M под действием силы, равной векторной сумме всех внешних сил, действующих на входящие в систему частицы. Например, прыгун в воду (рис. 1) вращается во время прыжка, но его ЦМ движется по параболической траектории.

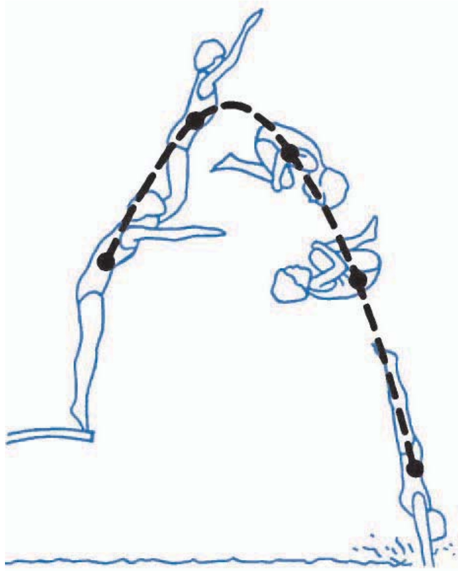

Рис. 1

При решении рассмотренных ниже задач мы, как правило, будем иметь дело со столкновением только двух тел, координаты которых в некоторый момент времени x_1 и x_2, а проекции скоростей в тот же момент – v_{1x} и v_{2x} соответственно (рис. 2).

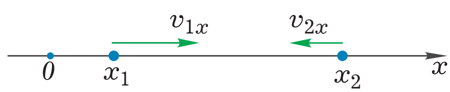

Рис. 2

В этом случае нам потребуется умение определять только две величины, характеризующие ЦМ:

1) координату x_C ЦМ системы из двух материальных точек:

$$x_C = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{m_1 + m_2}, \qquad (*)$$

2) величину проекции скорости v_{Cx} ЦМ этих точек:

$$v_{Cx} = \frac{m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x}}{m_1 + m_2}. \qquad (**)$$

Аналогичным образом находятся координаты ЦМ и проекции его скорости на другие оси: все встречающиеся в записанных выше формулах буквы x заменяем на y или z.

Примеры решения задач

Начнём с задачи, в которой решение с помощью перехода в СОЦМ достаточно ярко продемонстрирует его преимущество по сравнению со стандартным способом решения.

Задача 1 (ЕГЭ, 2004). Брусок массой $m_1 = 600$ г, движущийся со скоростью $v = 2$ м/с, сталкивается с неподвижным бруском массой $m_2 = 200$ г. Какова скорость первого бруска после столкновения? Удар считать центральным и абсолютно упругим.

Первый способ решения.

Действие внешних сил на систему из двух брусков скомпенсировано, кроме того, потери энергии в ней отсутствуют. Поэтому можно использовать законы сохранения импульса и энергии:

$$m_1 v = m_1 u_1 + m_2 u_2, \qquad (1)$$

$$\frac{m_1 v^2}{2} = \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \qquad (2)$$

где u_1 и u_2 – скорости первого и второго брусков после столкновения соответственно.

Решение системы уравнений (1) – (2) может вызвать некоторые затруднения, если использовать обычный в таких случаях приём: сначала выразить одно неизвестное из первого уравнения, а затем подставить его во второе. Заметьте, что второе уравнение – квадратное, поэтому решение окажется достаточно громоздким.

Попробуем поступить иначе. Перенесём в обоих уравнениях слагаемые с m_1 в левые части уравнений и вынесем m_1 за скобки:

$$m_1(v - u_1) = m_2 u_2,$$

$$m_1(v^2 - u_1^2) = m_2 u_2^2.$$

Разделив нижнее уравнение на верхнее, получим

$$v + u_1 = u_2.$$

Подставим полученное выражение для u_2 в (1):

$$m_1 v = m_1 u_1 + m_2(v + u_1),$$

откуда находим искомую скорость первого бруска после столкновения:

$$u_1 = v\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 2 \cdot \frac{0,6 - 0,2}{0,6 + 0,2} = 1 \text{ м/с}.$$

Ответ. $u_1 = v\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} = 1$ м/с.

Замечание. Любители математической строгости обратят внимание, что при делении нижнего уравнения на верхнее упущено ещё одно решение системы уравнений:

$$u_1 = v_1,\ u_2 = 0.$$

Обычно его отбрасывают как не имеющее физического смысла. И всё же в некоторых случаях это решение может иметь наглядную интерпретацию.

К примеру, представим себе такую ситуацию: второй брусок заменили на горку (рис. 3). Тогда взаимодействие первого бруска и горки математически описывается теми же уравнениями (1) и (2). А физи-

Рис. 3

чески произойдёт вот что: брусок, наезжая на горку, сначала начнёт её разгонять, тормозя при этом сам. Затем, съезжая с горки, брусок станет разгоняться, а горка – тормозить. Когда же брусок покинет горку, он поедет дальше с прежней скоростью, а горка останется неподвижной.

Второй способ решения.

После приведённого выше наполненного математическими преобразованиями решения нелегко представить, что эту задачу можно было бы решить практически устно. И всё же такой способ решения существует! Только в этом случае нужно использовать СОЦМ.

Из формулы (**) определим скорость ЦМ брусков, учитывая, что в нашей задаче $v_{1x} = v$, $v_{2x} = 0$ (рис. 4 *а*); кроме того, заметим, что $m_1 = 3m_2$. Тогда скорость ЦМ системы равна

$$v_c = \frac{m_1 v + 0}{m_1 + m_2} = \frac{3m_2 v}{3m_2 + m_2} = \frac{3v}{4}.$$

Посмотрим теперь, как движутся бруски в СОЦМ (рис. 4).

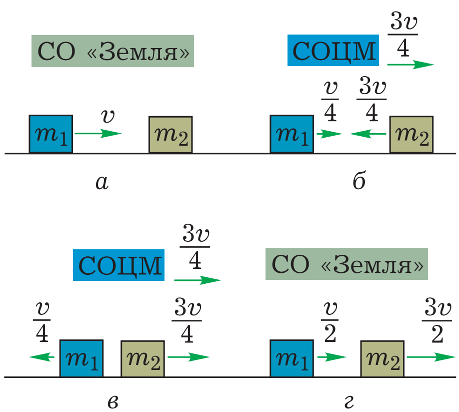

Рис. 4

Для определения скорости первого бруска в СОЦМ вычтем из модуля его скорости v относительно Земли модуль скорости $3v/4$ ЦМ системы. В результате получим, что брусок m_1 движется в СОЦМ перед столкновением вправо со скоростью $v/4$; аналогично рассуждая, видим, что скорость бруска массой m_2 равна $3v/4$ и направлена влево (рис. 4 *б*). Обратите внимание, что *импульсы тел в СОЦМ равны по величине и противоположны по направлению* – это общая закономерность данной СО: в ней суммарный импульс всех тел всегда равен нулю.

Что произойдёт с импульсами тел после удара? Каждый из них поменяет только своё направление на противоположное, не изменив его величины (рис. 4 *в*). Почему? В противном случае нарушится либо закон сохранения импульса, либо закон сохранения энергии, а это запрещено самой Природой!

Следовательно, модуль скорости первого бруска будет по-прежнему равен $v/4$, но теперь уже вектор скорости направлен влево. (Информация о дальнейшем движении второго бруска в решении данной задачи не нужна, но она имеется на рис. 4 *в* и 4 *г*.)

Для получения искомого ответа осталось лишь не забыть вернуться в СО, связанную с Землёй (рис. 4 *г*). Вычитая из скорости $3v/4$ ЦМ системы скорость $v/4$ первого бруска после столкновения в СОЦМ, приходим к конечному результату: скорость первого бруска после столкновения в СО, связанной с Землёй, равна $v/2 = 1$ м/с.

Итак, как и было обещано, задача решена практически без использования громоздких математических преобразований.

Внимательный читатель может заметить: при решении задачи первым способом мы не учитывали упрощающее предположение о том, что масса первого бруска втрое больше массы второго (что дало значительную экономию во времени при решении вторым способом).

Конечно, подобное упрощение важно умело использовать, и пройти мимо него было бы едва ли разумно.

И всё же как поступать в общем случае, когда массы сталкивающихся тел заданы в буквенном виде: m_1 и m_2?

Тогда удобно ввести коэффициент $k = m_1/m_2$, показывающий отношение масс брусков. Используем этот коэффициент для определения скорости ЦМ в общем случае:

$$v_C = \frac{m_1 v + 0}{m_1 + m_2} = \frac{k m_2 v}{k m_2 + m_2} = \frac{k}{k+1} v .$$

Советуем читателям самостоятельно заново проделать весь ход рассуждений в общем случае, подобно рассмотренным выше – для частного случая. Полученные вами результаты можете сопоставить с рисунками 5 *а* – 5 *г*. Следует отметить, что при $k < 1$ (т. е. при $m_1 < m_2$) скорость бруска массой m_1 в СО, связанной с Землёй, получится отрицательной. Это означает, что брусок массой m_1 будет двигаться влево, т. е. отскочит назад.

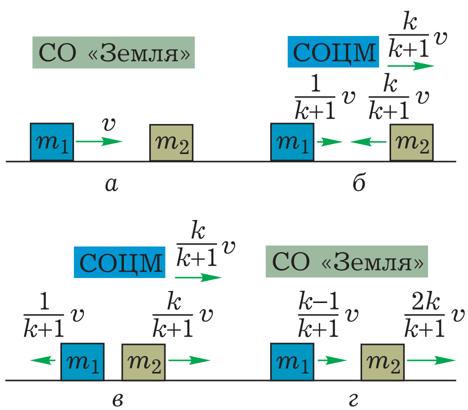

Рис. 5

Две следующие задачи будем решать только способом перехода в СОЦМ, вновь демонстрируя его эффективность.

Задача 2 (ЕГЭ, 2009). Два шарика, массы которых отличаются в 3 раза, висят, соприкасаясь, на вертикальных нитях. Лёгкий шарик отклоняют на угол 90° и отпускают без начальной скорости (рис. 6). Каким будет отношение импульсов тяжёлого и лёгкого шариков тотчас после их абсолютно упругого центрального удара?

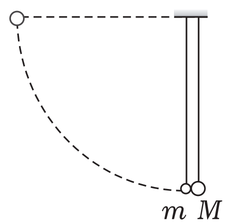

Рис. 6

Решение подобных задач разбивают обычно на два этапа: 1) движение первого шарика до столкновения со вторым; 2) процесс соударения шариков.

Начнём с рассмотрения второго этапа.

Обратим внимание на сходство данной задачи с предыдущей и на некоторые их отличия. Одно из общих черт условий – соотношение между массами: их отношение в обоих случаях равно трём. Правда, в данной задаче неподвижен более тяжёлый шар.

Определим сначала скорость ЦМ:

$$v_C = \frac{mv + 0}{m + M} = \frac{mv}{m + 3m} = \frac{v}{4}.$$

Значит, в СОЦМ лёгкий шарик движется перед ударом вправо со скоростью $3v/4$, а тяжёлый – влево со скоростью $v/4$. После удара их скорости в СОЦМ изменят направления на противоположные, не изменив при этом своего модуля. (Обязательно сделайте поясняющие рисунки!)

Вернёмся теперь в СО, связанную с Землёй. В ней скорость лёгкого шарика равна по модулю $v/2$ и направлена влево. Скорость тяжёлого также равна $v/2$, но направлена вправо. Следовательно, искомое отношение импульсов тяжёлого и лёгкого шаров после удара равно отношению их масс, т. е. трём.

Ответ. 3.

«Позвольте, – может возразить внимательный читатель, – а как же быть с первым этапом решения? Его-то мы вообще не использовали!»

Действительно, ответ в задаче не зависит ни от угла отклонения нити, ни от скорости лёгкого шарика перед ударом!

Такого в вариантах вступительных экзаменов прежних лет не было. Любой школьник прошлого века регулярно мог слышать от учителя: «В задаче лишних данных не бывает!». Иногда, правда, подобные задачи попадали в разряд задач-софизмов. Теперь же, с приходом ЕГЭ, нужно твёрдо запомнить: задачи с избыточными данными регулярно встречаются практически в любых его вариантах.

Задача 3 (НГУ). На горизонтальной гладкой плоскости в начальный момент покоится прямоугольная рамка массы m_1, длина большей стороны которой равна l (рис. 7). Внутри рамки по плоскости со скоростью v, параллельной длинной стороне, начинает двигаться шарик массы m_2, который продолжает движение, ударяясь о середины коротких сторон рамки. Найти время между ударами шарика об одну и ту же короткую сторону. Размерами шарика пренебречь. Считать удары упругими.

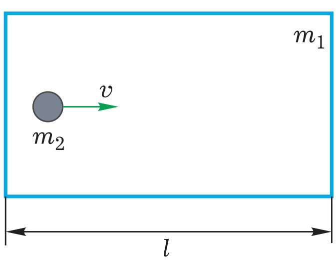

Рис. 7

Ну, вот мы и добрались, наконец, до задачи с массами тел, заданными в общем виде. Ничего страшного: решение окажется не очень сложным!

Пусть для определённости шарик вначале находится около левой стороны рамки. Ясно, что с правой стороной он столкнётся через время

$$t_1 = l/v.$$

А что произойдёт после первого удара? Для ответа на этот вопрос рассмотрим процесс в СОЦМ. После первого столкновения с правой стороной рамки шарик начнёт удаляться от неё, приближаясь к левой стороне. Мы уже отмечали, что в СОЦМ при упругом столкновении модули импульсов тел не изменяются, поэтому сохраняются неизменными модули скоростей тел, а направления меняются на противоположные. Следовательно, до второго столкновения шарик будет двигаться то же время t_1, поэтому искомое время

$$t = 2t_1 = 2l/v.$$

Ответ. $t = 2l/v$.

Для решения двух последних задач мы будем только следить за движением ЦМ системы из привычной СО, связанной с Землёй. Такое наблюдение за ЦМ и изучение его движения также позволит значительно упростить математические выкладки.

Чтобы убедиться в этом, решим следующую задачу снова двумя способами.

Задача 4. С поверхности Земли бросили вертикально вверх кусочек пластилина со скоростью v_0. Одновременно такой же кусочек пластилина начал падать без начальной скорости с высоты H. При столкновении кусочки слиплись. Через какое время t после начала бросания и с какой скоростью v слипшийся комок упадёт на Землю?

Первый способ решения.

Стандартное решение данной задачи состоит из нескольких этапов.

1) Определяем кинематически время и место столкновения кусочков пластилина, записав их уравнения движения:

$$\left.\begin{aligned} h &= H - \frac{gt_1^2}{2} \\ h &= v_0 t - \frac{gt_1^2}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow H = v_0 t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{H}{v_0},$$

$$h = H - \frac{gH^2}{2v_0^2}. \qquad (3)$$

2) Зная время t_1, находим скорости кусочков перед столкновением:

$$v_1 = v_0 - gt_1 = v_0 - \frac{gH}{v_0},$$

$$v_2 = gt_1 = \frac{gH}{v_0}.$$

3) С помощью закона сохранения импульса определяем скорость v^* комка после слипания кусочков:

$$mv_1 - mv_2 = 2mv^* \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v^* = \frac{1}{2}(v_1 - v_2) = \frac{v_0}{2} - \frac{gH}{v_0}. \qquad (4)$$

4) Записываем кинематическое уравнение для дальнейшего движения комка до поверхности Земли:

$$0 = h + v^* t_2 - \frac{gt_2^2}{2}, \qquad (5)$$

где t_2 – время движения слипшегося комка до падения.

Подставив в выражение (5) значения h и v^* из (3) и (4) соответственно, получим квадратное уравнение, в котором все величины, кроме времени t_2, известны:

$$\frac{g}{2}t_2^2 - \left(\frac{v_0}{2} - \frac{gH}{v_0}\right)t_2 - \left(H - \frac{gH^2}{2v_0^2}\right) = 0.$$

Из этого уравнения находим t_2:

$$t_2 = \frac{v_0 - 2gH/v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4gH}}{2g}$$

(знак «минус» перед квадратным корнем мы отбросили, т. к. $t_2 > 0$).

Искомое время t равно сумме времён t_1 и t_2:

$$t = t_1 + t_2 = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4gH}}{2g}.$$

Итак, первый ответ получен!

5) Осталось найти скорость v комка в момент падения. Для этого из кинематического уравнения

$$-h = \frac{v^2 - v^{*2}}{-2g}$$

выразим v:

$$v = \sqrt{v^{*2} + 2gh}.$$

Подставив сюда значения h и v^* из (3) и (4) соответственно, определим последнюю в этой задаче искомую величину:

$$v = \frac{\sqrt{v_0^2 + 4gH}}{2}.$$

Ответ: $t = \dfrac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4gH}}{2g}$;

$$v = \frac{\sqrt{v_0^2 + 4gH}}{2}.$$

Второй способ решения.

Попробуем быстрее прийти к верному ответу, для чего рассмотрим движение ЦМ системы.

Вначале кусочки пластилина находятся в разных точках и имеют разные скорости. ЦМ этой системы находится на высоте $H_{0C} = H/2$, а его скорость направлена вверх и равна $v_{0C} = v_0/2$ (для расчёта мы использовали выражения (*) и (**)). После слипания кусочков они оказываются в одной точке с ЦМ.

Поэтому можно считать, что мы рассматриваем движение тела, брошенного вертикально вверх со скоростью $v_{0C} = v_0/2$ с высоты $H_{0C} = H/2$.

Обратите внимание, что поскольку нас интересует только общее время движения и конечная скорость, то разбивать движение на отдельные участки не нужно. Это значительно упрощает решение.

Искомую скорость комка в момент падения можно легко определить, например, из закона сохранения энергии, записанного для ЦМ системы:

$$\frac{Mv_{0C}^2}{2} + MgH_{0C} = \frac{Mv^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow v = \sqrt{v_{0C}^2 + 2gH_{0C}}.$$

Подставив в это выражение значения v_{0C} и H_{0C}, получим:

$$v = \frac{\sqrt{v_0^2 + 4gH}}{2}.$$

Из формулы зависимости координаты от времени при свободном падении

$$x = x_0 + v_{0x}t + \frac{g_x t^2}{2},$$

где

$$x = 0,\ x_0 = \frac{H}{2},\ v_{0x} = \frac{v_0}{2},\ g_x = -g,$$

определим время t от начала движения до падения:

$$0 = \frac{H}{2} + \frac{v_0}{2}t - \frac{gt^2}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow t = \frac{v_0 + \sqrt{v_0^2 + 4gH}}{2g}.$$

И вновь преимущества второго способа решения не вызывают сомнений!

В заключение рассмотрим задачу, в которой траектория движения тел не является прямой.

Задача 5 (МФТИ, 1984)**.** С горизонтальной поверхности земли бросили под углом $\alpha = 45°$ к горизонту комок сырой глины. Одновременно комок втрое большей массы бросили с поверхности земли под углом $\beta = 60°$ к горизонту, причём начальные скорости комков оказались лежащими в одной вертикальной плоскости (рис. 8). В результате столкновения комки слиплись. Под каким углом γ к горизонту упал на землю слипшийся комок?

Рис. 8

Как и в решении предыдущей задачи, рассмотрим движение ЦМ комков. Траектория его движения – парабола (попробуйте доказать это утверждение строго). Значит, комок упадёт на Землю под тем же углом, под которым двигался в начальный момент его ЦМ. Именно этот начальный угол γ мы и будем искать.

Поместим начало координат в точке бросания комка массы $3m$, направив ось x горизонтально влево, а ось y – вертикально вверх.

Используя формулу (**) и аналогичную для оси y, определим проекции скорости v_{Cx} и v_{Cy} ЦМ в начальный момент времени:

$$v_{Cx} = \frac{3mv_2\cos\beta - mv_1\cos\alpha}{4m} = \frac{1}{4}\left(\frac{3}{2}v_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}v_1\right); \quad (6)$$

$$v_{Cy} = \frac{3mv_2\sin\beta + mv_1\sin\alpha}{4m} = \frac{1}{4}\left(3\frac{\sqrt{3}}{2}v_2 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_1\right) \quad (7)$$

(здесь v_1 и v_2 – скорости комков в этот момент).

Связь между скоростями v_1 и v_2 найдём из условия, что в точке столкновения, которое произошло через время t, координата по оси y у комков одинаковая:

$$v_1 t \sin\alpha - \frac{gt^2}{2} = v_2 t \sin\beta - \frac{gt^2}{2},$$

откуда

$$v_2 = v_1 \frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = v_1\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Подставив найденное значение для v_2 в (6) и (7), получим:

$$v_{Cx} = \frac{\sqrt{2}}{8}(\sqrt{3}-1)v_1;\ v_{Cy} = \frac{\sqrt{2}}{2}v_1.$$

Зная найденные проекции, легко определить искомый угол:

$$\mathrm{tg}\gamma = \frac{v_{Cy}}{v_{Cx}} = 2(\sqrt{3}+1).$$

Ответ. $\gamma = \mathrm{arctg}\left[2(\sqrt{3}+1)\right]$.

Выводы

Итак, мы убедились, что при решении задач на столкновение тел без использования законов сохранения энергии и импульса не обойтись. Однако записывать уравнения, выражающие эти законы, во многих случаях удобнее в СОЦМ. В ней математические выкладки упрощаются, а физический смысл явлений становится яснее.

В данной статье был детально рассмотрен только лобовой (центральный) абсолютно упругий удар и неупругое столкновение. Мы совершенно не касались интересных закономерностей нецентрального столкновения: это тема отдельной статьи. Однако и в том случае, когда удар оказывается нецентральным, использование СОЦМ позволяет во многих ситуациях избавиться от нередко встречающихся весьма утомительных алгебраических преобразований.

Задачи для самостоятельного решения

1. Во сколько раз уменьшится скорость альфа-частицы после центрального упругого удара о неподвижный протон, масса которого в четыре раза меньше массы альфа-частицы? (Ответ: в 5/3 раза.)

2. В момент наибольшего сближения частиц при упругом лобовом столкновении их скорости одинаковы и равны v. Каковы скорости этих частиц после разлёта, если до столкновения они двигались со скоростями $3v$ и $v/2$? (Ответ: v; $3v/2$.)

3. Снаряд, вылетевший из орудия под некоторым углом к горизонту, в верхней точке своей параболической траектории разрывается на два осколка равной массы. Один осколок после взрыва возвращается к орудию по прежней траектории. Где упадёт второй осколок? Упадут ли оба осколка на землю одновременно? Сопротивление воздуха не учитывать. (Ответ. Второй осколок упадёт на Землю вдвое дальше, чем упал бы снаряд. Упадут одновременно.)

4. (МФТИ, 1984). С горизонтальной поверхности земли бросили под углом $\alpha = 60^\circ$ к горизонту со скоростью $v_1 = 12$ м/с комок сырой глины. Одновременно комок вдвое большей массы бросили навстречу первому под углом $\beta = 30^\circ$ к горизонту, причём начальные скорости комков оказались лежащими в одной вертикальной плоскости. В результате столкновения комки слиплись. Найдите скорость (по модулю) упавшего на землю слипшегося комка. (Ответ: ≈14 м/с.)

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Многомудрая беседа

– Итак, вычисления я провожу в уме, вот результат… Проверьте его.
– Ответ верен.
– Как вы убедились в этом?
– Вычислил в уме.