Ромашкевич Александр Иосифович
*Старший преподаватель кафедры общей физики Московского государственного института электронной техники (технического университета).
Автор ряда пособий для школы: «Механика», «Электродинамика», «Молекулярная физика», «Оптика», объединённых в серию «Учимся решать задачи».*

Кинематические связи в задачах по механике

В статье рассматриваются задачи, в которых используется кинематическая связь движения или тел системы (например, тел, связанных нерастяжимой нитью), или протяжённого твёрдого тела, где используется положение о том, что расстояние между любыми его точками остаётся постоянным. Кинематическая связь может быть и более сложной.

На движение точек одной и той же механической системы, как правило, наложены некоторые ограничения, обусловленные её геометрией. Назовём их кинематическими связями. Иногда мы пользуемся ими, не отдавая себе в этом отчёта. Так, условие $Z = 0$ означает, что движение происходит в плоскости XY. А мы просто решаем плоскую задачу, принимая это условие как нечто само собой разумеющееся.

Рассмотрим простейшие связи. Концы A и B нити, перекинутой через блок (рис. 1), движутся так, что их скорости и ускорения связаны соотношениями:

$$\vec{v}_A = -\vec{v}_B \quad \text{и} \quad \vec{a}_A = -\vec{a}_B.$$

Эти соотношения обусловлены *нерастяжимостью* нити. Рассмотрим две задачи на эту тему

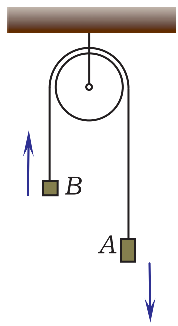

Рис. 1

Задача 1. Три катера, связанные нерастяжимым тросом, тянут баржу, как показано на рисунке 2. Скорости катеров $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$. Найти величину скорости баржи в момент, когда углы $\alpha = \beta = 30°$.

Решение. Неизменность длины троса l означает:

$$l = const,$$
$$\Delta l = 0.$$

Канат состоит из четырёх частей, поэтому

$$\Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 + \Delta l_4 = 0. \qquad (1)$$

Здесь Δl_1 – часть каната от первого катера до блока баржи, Δl_2, Δl_3 – от блока баржи до блока второго катера и обратно, Δl_4 – от блока баржи до третьего катера.

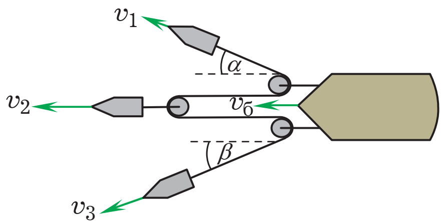

Рис. 2

Прежде всего отметим, что натяжение каната одинаково по всей его длине. Движение баржи обеспечивается четырьмя силами натяжения. Симметричная геометрия сил (см. рис. 3) позволяет заключить, что движение баржи, а значит и скорость, сонаправлены с осью x.

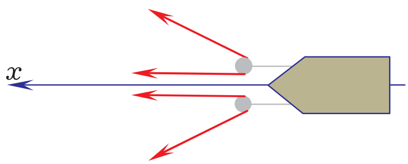

Рис. 3

Изменение длины части каната Δl_1 за время Δt становится ясным из рисунка 4:

$$\Delta l_1 = \left(v_1 - v_{1б}\right)\Delta t = \left(v_1 - v_б \cos\alpha\right)\Delta t.$$

Изменение длин второй и третьей частей каната за время Δt одинаково и равно

$$\Delta l_2 = \left(v_2 - v_б\right)\Delta t,$$
$$\Delta l_3 = \left(v_2 - v_б\right)\Delta t.$$

На четвёртом участке Δl_4 аналогично Δl_1:

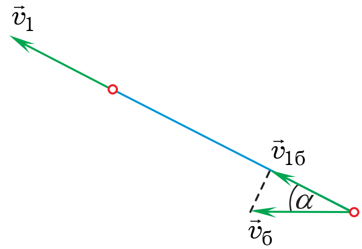

Рис. 4

$$\Delta l_4 = \left(v_3 - v_{3б}\right)\Delta t = \left(v_3 - v_б \cos\alpha\right)\Delta t.$$

Подставляем полученные выражения в уравнение (1)

$$\left(v_1 - v_б \cos\alpha\right)\Delta t + 2\left(v_2 - v_б\right)\Delta t +$$
$$+\left(v_3 - v_б \cos\alpha\right)\Delta t = 0$$

и получаем:

$$2v_б\left(1 + \cos\alpha\right) = v_1 + 2v_2 + v_3,$$
$$v_б = \frac{v_1 + 2v_2 + v_3}{2\left(1 + \cos\alpha\right)}.$$

Ответ. $v_б = \dfrac{v_1 + 2v_2 + v_3}{2\left(1 + \cos\alpha\right)}.$

Задача 2. Две нерастяжимые нити, перекинутые через блоки, связаны в точке A. К этой же точке подвешен некоторый груз. Концы нитей вытягивают со скоростями v_1 и v_2, как показано на рисунке 5. Найти величину скорости узла A в момент, когда угол между нитями при узле A равен α.

Решение. Нерастяжимость нитей означает (см. рис. 5), что

$$\left|\vec{v}_1\right| = v_1 \quad \text{и} \quad \left|\vec{v}_2\right| = v_2.$$

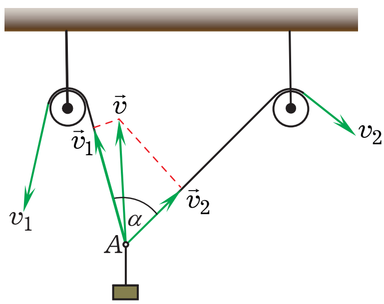

Рис. 5

Есть соблазн сложить $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ по правилу векторов, но это будет ошибкой: $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ всего лишь скорости узла A в направлении блоков и равны проекциям скорости $\vec{v}$ узла A на эти направления. После правильного выполнения рисунка кинематической связи скоростей (рис. 6) остаётся алгебраическая часть задачи по нахождению скорости узла A:

$$\begin{cases} \varphi + \beta = \alpha, \\ v\cos\varphi = v_1, \\ v\cos\beta = v_2. \end{cases}$$

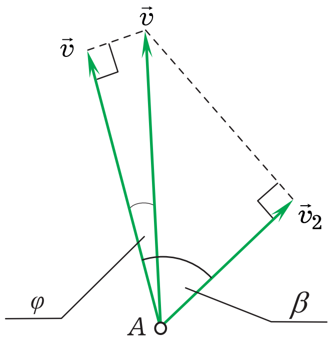

Рис. 6

Предоставляем читателю возможность потренироваться в решении системы уравнений с тремя неизвестными (v, φ, β).

А мы покажем геометрический способ нахождения величины $\vec{v}$. Вспоминая, что вписанный прямой угол опирается на диаметр, строим окружность с диаметром $|\vec{v}|$. Концы векторов $\vec{v}_1$, $\vec{v}$, $\vec{v}_2$ и точка A лежат на этой окружности.

Сделаем дополнительное построение. Построим вектор $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$. Затем из конца вектора $\vec{v}_1$ (точка C) восстановим перпендикуляр к вектору $\vec{v}_2 - \vec{v}_1$ (рис. 7) до пересечения с окружностью (точка B). Ясно, что отрезок BD тоже будет диаметром окружности ($BC \perp CD$), а $\angle CBD = \angle CAD = \alpha$, так как они оба вписанные и опираются на одну и ту же дугу.

Из треугольника BCD находим: $BD = \dfrac{CD}{\sin\alpha}$, или, переходя к данным условия: $|\vec{v}| = \dfrac{|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|}{\sin\alpha}$. Лаконичная красивая формула. Остаётся выразить $|\vec{v}_2 - \vec{v}_1|$ из треугольника ACD, воспользовавшись теоремой косинусов:

$$|\vec{v}_2 - \vec{v}_1| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}.$$

Окончательно:

$$|\vec{v}| = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Ответ. $|\vec{v}| = \dfrac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1v_2\cos\alpha}}{\sin\alpha}.$

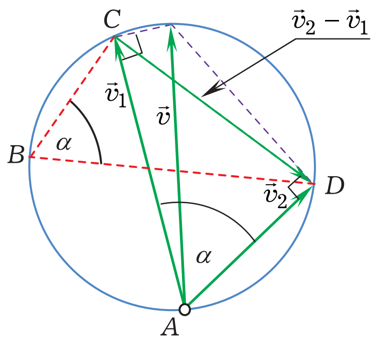

Рис. 7

Задача 3. Две тонкие спицы 1 и 2, расположенные в одной плоскости, пересекаются в точке O под углом α. В некоторый момент спицу 1 начинают перемещать поступательно со скоростью $\vec{v}_1$ в направлении, перпендикулярном спице, как показано на рис. 8. Одновременно аналогичным способом начинают перемещать спицу 2 со скоростью $\vec{v}_2$. С какой скоростью $\vec{v}$ перемещается точка пересечения спиц?

Решение. На рис. 8 пунктиром изображены спицы 1 и 2 в начальный момент времени с пересечением в точке O. Сплошными линиями показаны положения спиц ($1'$ и $2'$) через одну секунду. За эту секунду точка пересечения переместилась в положение O'. Вектор $\vec{v}$, проведённый из O в O', и есть искомая скорость. Рисунок показывает уже знакомую кинематическую связь скоростей $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$ и $\vec{v}$ (задача 2, рис. 6). Поэтому решать, собственно, нечего. Учитывая, что угол между векторами $\vec{v}_1$ и $\vec{v}_2$ равен $180° - \alpha$, имеем:

$$|\vec{v}| = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 - 2v_1 v_2 \cos\left(180^\circ - \alpha\right)}}{\sin\alpha} = \frac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}}{\sin\alpha}.$$

Ответ. $|\vec{v}| = \dfrac{\sqrt{v_1^2 + v_2^2 + 2v_1 v_2 \cos\alpha}}{\sin\alpha}$.

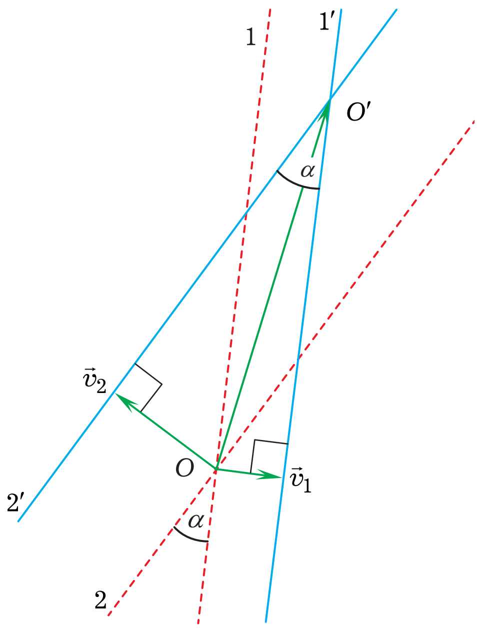

Рис. 8

В решебниках по физике часто встречается такая задача.

Задача 4. По двум взаимно перпендикулярным составляющим скользят муфты A и B, шарнирно связанные стержнем AB. Какова скорость муфты B, когда угол между стержнем и направляющей с муфтой B равен α, а скорость муфты A равна v_A (рис. 9)?

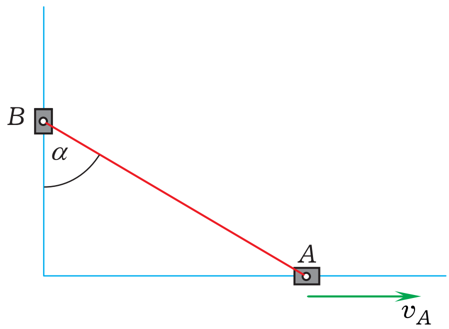

Рис. 9

Эту задачу не имело бы смысла приводить, тем более, что в тех же пособиях приводятся различные способы решения, если бы она не давала повода обратить внимание на кинематическую связь скоростей муфт.

Поясним сказанное с помощью простейшей задачи на эту тему.

Задача 5. Карандаш AB свободно скользит по поверхности стола. В некоторый момент времени скорость конца A равна v_A и составляет угол α с направлением стержня карандаша. Скорость конца B в этот же момент $v_B = 2v_A$. Найти угол β между скоростью конца B и направлением стержня карандаша (рис. 10).

Решение. Чтобы конец A не «догонял» конец B или не «отставал» от него, надо, чтобы скорости концов в направлении стержня были одинаковыми. Из рисунка ясно, что

$$v_A \cos\alpha = v_B \cos\beta.$$

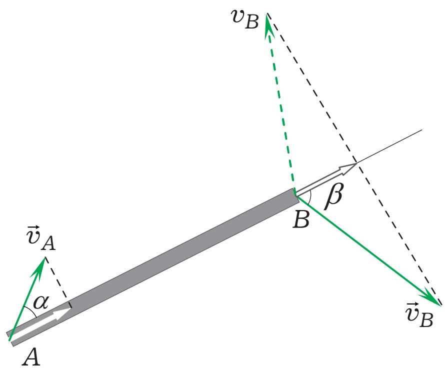

Рис. 10

Это и есть кинематическая связь движения концов стержня, обусловленная его нерастяжимостью.

Заканчивая задачу, находим:

$$v_A \cos\alpha = 2v_A \cos\beta \text{ и } \cos\beta = \frac{\cos\alpha}{2}.$$

Заметим, что возможны два направления скорости конца B (симметрично относительно направления стержня), но это не влияет на полученное соотношение.

Ответ. $\cos\beta = \dfrac{\cos\alpha}{2}$.

Возвращаясь к исходной задаче 4, понимаем, что это повторение задачи про карандаш, только в иной формулировке. Нерастяжимость стержня AB снова означает равенство скоростей концов в направлении стержня (рис. 11):

$$v_B \cos\alpha = v_A \sin\alpha \text{ и } v_B = v_A \operatorname{tg}\alpha.$$

Ответ. $v_B = v_A \operatorname{tg}\alpha$.

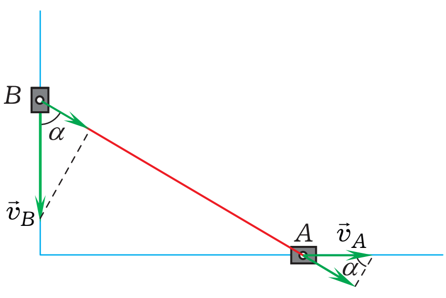

Рис. 11

Задача 6. Правильный (равносторонний) треугольник ABC скользит по поверхности стола. Скорость вершины A равна v и направлена к вершине B. Скорость вершины B равна $2v$. Найти величину скорости $\vec{v}_C$ вершины C.

Решение. Нерастяжимость стороны AB треугольника означает, что скорость вершины B в направлении этой стороны равна $\vec{v}_A$. Так как $\vec{v}_B$ по модулю в два раза больше $\vec{v}_A$, легко понять, что угол между ними равен 60°, а это значит, что $\vec{v}_B$ направлена вдоль стороны CB.

Из рисунка 12 понятно, что скорость вершины C в направлении стороны BC по модулю равна $2v$, а в направлении стороны AC равна (по модулю)

$$v\cos 60^\circ = \frac{1}{2}v.$$

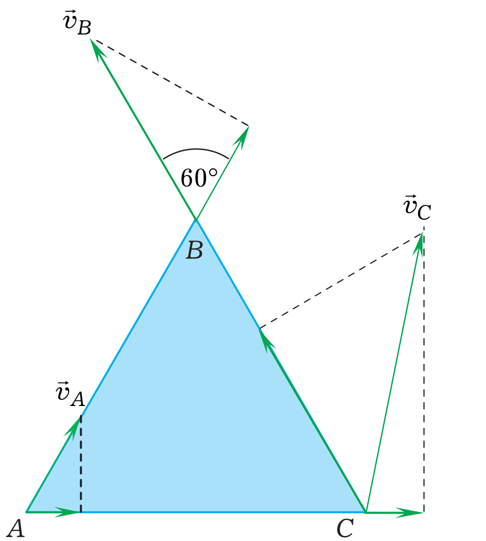

Рис. 12

Но такая картинка встречается уже в третий раз (задачи 2 и 3)! Поэтому будет позволительно опять воспользоваться готовой формулой:

$$\left|\vec{v}_C\right| = \frac{\sqrt{(2v)^2 + (0,5v)^2 - 2(2v)(0,5v)\cos 120^\circ}}{\sin 120^\circ} =$$

$$= \frac{\sqrt{4v^2 + 0,25v^2 + 2v^2\cos 60^\circ}}{\sin 60^\circ} = v\sqrt{7};$$

Чтобы не усложнять рис. 12, мы не изобразили на нём второй возможный вариант направления скорости $\vec{v}_B$. Рассмотрим его отдельно.

При той же скорости в направлении стороны AB сама скорость $\vec{v}_B$ в этом варианте направлена параллельно стороне AC (рис. 13).

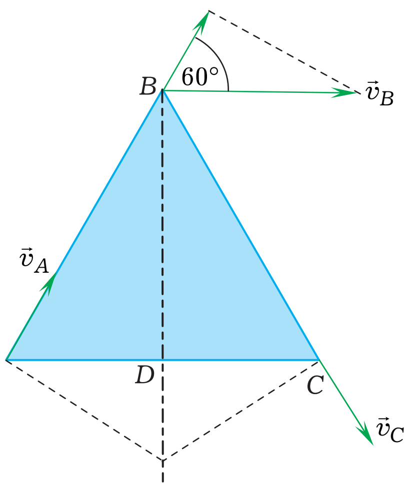

Рис. 13

Теперь проще всего найти скорость $\vec{v}_C$ с помощью мгновенной оси вращения. Она лежит на перпендикуляре к $\vec{v}_B$. И даже не нужно искать положение самой мгновенной оси. Достаточно того, что любая точка перпендикуляра BD равноудалена от вершин A и C, откуда следует

$$\left|\vec{v}_C\right| = \left|\vec{v}_A\right| = v.$$

Ответ. 1) $\left|\vec{v}_C\right| = v\sqrt{7}$; 2) $\left|\vec{v}_C\right| = v$.

Если в задаче предлагается взаимозависимое движение двух тел, кинематическая связь может быть более сложной.

Задача 7. На горизонтальном столе лежит клин с углом α при прилегающей к столу грани (рис. 14).

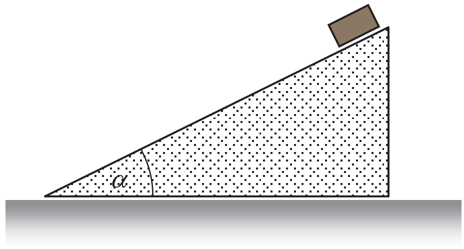

Рис. 14

Масса клина M. С клина соскальзывает брусок массой m. Пренебрегая трением между всеми соприкасающимися поверхностями, найти ускорение клина.

Решение. Проделаем небольшой анализ. При движении брусок будет «выдавливать» клин влево, поэтому сам будет перемещаться к столу под углом, бóльшим α. Это значит, что в задаче будет шесть неизвестных (рис. 15):

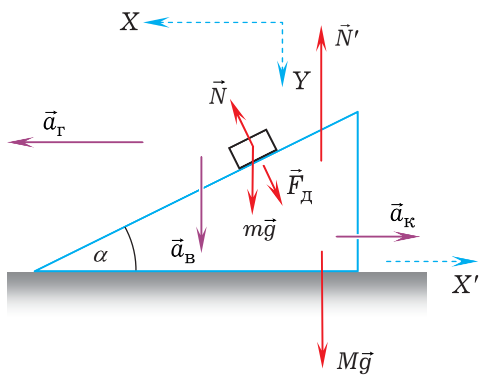

Рис. 15

$a_г$ – горизонтальное ускорение бруска,

$a_в$ – вертикальное ускорение бруска,

$a_к$ – ускорение клина,

N – реакция опоры клина на брусок,

$F_д$ – сила давления бруска на клин,

N' – реакция опоры стола на клин.

Многовато, но не страшно.

Согласно законам классической механики Ньютона, в нашем распоряжении три уравнения:

$\vec{N} + m\vec{g} = m\vec{a}_б$ (для бруска),

$\vec{F}_д + M\vec{g} + N' = M\vec{a}_к$ (для клина),

$\vec{F}_д = -\vec{N}$ (третий закон Ньютона).

В проекциях на оси X и Y векторное уравнение для бруска даёт два скалярных:

$$N \sin\alpha = ma_г, \qquad (1)$$

$$mg - N\cos\alpha = ma_в. \qquad (2)$$

Уравнение для клина имеет смысл проецировать только на горизонтальное направление (проекция на вертикальное направление только добавляет неизвестное N'):

$$N \sin\alpha = Ma_к \qquad (3)$$

(мы воспользовались равенством $\left|\vec{N}\right| = \left|\vec{F}_д\right|$).

Итак, у нас осталось три уравнения (1), (2), (3) с четырьмя неизвестными $(a_г, a_в, a_к, N)$.

Очевидно, четвёртым уравнением послужит кинематическая связь. Для этого изобразим систему в начальный и в конечный моменты соскальзывания (рис. 16).

Из рисунка становится понятным, как связаны перемещения (а значит, и ускорения) бруска и клина:

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\dfrac{a_в t^2}{2}}{\dfrac{a_г t^2}{2} + \dfrac{a_к t^2}{2}} = \frac{a_в}{a_г + a_к}. \qquad (4)$$

Это и есть четвёртое, недостающее уравнение.

Предоставим читателю самостоятельно решить систему уравнений (это полезно), а мы приведём готовый ответ.

Ответ. $a_к = \dfrac{mg\sin 2\alpha}{2\left(m\sin^2\alpha + M\right)}.$

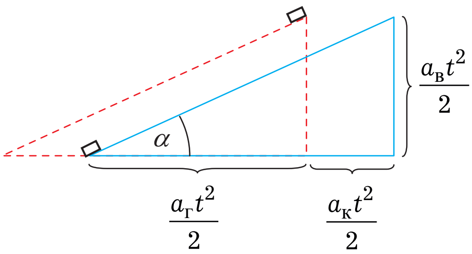

Рис. 16

Кинематическая связь скоростей нередко облегчает решение задач на столкновения.

Задача 8. По гладкой горизонтальной поверхности скользит стальной шар радиуса R. На его пути встречается твёрдая ступенька. Найти минимальную высоту ступеньки, при которой шар не сможет «запрыгнуть» на ступеньку, как бы ни была велика его скорость. Удар о ступеньку считать абсолютно упругим.

Решение. При абсолютно упругом ударе о ребро ступеньки начальная скорость (после удара) и скорость шара до удара одинаковы (разумеется, по модулю). Это следует из закона сохранения энергии. Силовое воздействие на шар происходит нормально к поверхности шара, то есть направлено радиально к центру. По закону Ньютона

$$\vec{F}\Delta t = m\Delta\vec{v},$$

вектор $\Delta\vec{v}$ имеет то же направление, что и $\vec{F}$.

Теперь можно выполнить рисунок 17 с учётом сказанного.

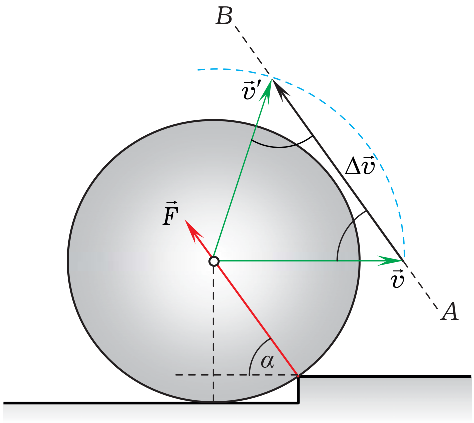

Рис. 17

Через конец вектора $\vec{v}$ проводим линию *AB*, параллельную вектору $\vec{F}$. Радиусом, равным $|\vec{v}|$, проводим дугу окружности с центром *O* до пересечения с *AB* и в точке пересечения замыкаем треугольник:

$$\vec{v}' = \vec{v} + \Delta\vec{v},$$

где $\vec{v}'$ – начальная скорость шара *после удара*. Дугами отмечены углы, равные α.

Вот, собственно, и всё. Шар может «запрыгнуть» на ступеньку, если скорость $\vec{v}'$ имеет составляющую $\vec{v}_г$ в сторону ступеньки. Надо только подобрать достаточно большую скорость шара $\vec{v}$, чтобы за время движения по горизонтали шар успел подняться на высоту ступени.

А вот чтобы шар вообще не смог преодолеть ступеньку, достаточно, чтобы скорость $\vec{v}'$ была направлена вертикально. Этим и определяется минимальная высота ступеньки, не «пропускающая» шар дальше. При этом угол $\alpha = 45°$ (рис. 18).

Дальше простой расчёт:

$$h = R - \frac{R}{\sqrt{2}} \approx 0,29R.$$

Ответ. $h \approx 0,29R$.

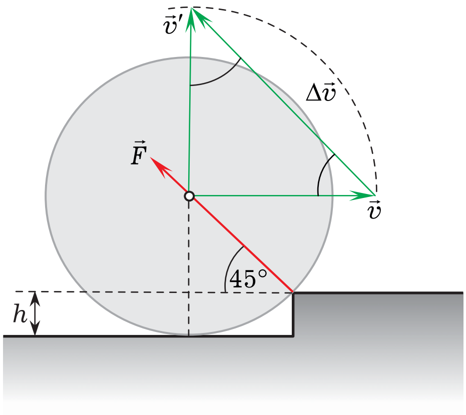

Рис. 18

Завершим рассказ о кинематических связях ещё одной задачей на столкновения.

Задача 9. По гладкой горизонтальной поверхности стола движутся навстречу друг другу (параллельными курсами) две шайбы одинаковой толщины (рис. 19). Расстояние между линиями движения центров шайб в полтора раза больше радиуса первой шайбы: $b = 1,5R_1$. Плотность материала первой шайбы в четыре раза больше плотности второй шайбы: $\rho_1 = 4\rho_2$. Массы шайб и их скорости одинаковы. На какой угол после абсолютно упругого столкновения отклонятся скорости шайб?

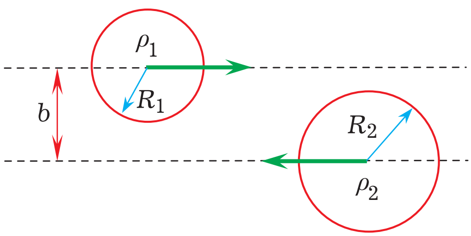

Рис. 19

Решение. Импульсы шайб по величине одинаковы ($m_1 = m_2 = m$, $|\vec{v}_1| = |\vec{v}_2| = v$) и противоположно направлены, значит, импульс системы равен нулю. Из закона сохранения импульса следует, что после столкновения он также будет равен нулю. Это означает, что шайбы разлетятся в противоположных направлениях с равными импульсами. А из закона сохранения энергии ясно, что и по величине импульсы не изменятся. Но законы сохранения допускают любой угол отклонения скоростей после соударения. Выручает рисунок кинематической связи «прицельного параметра» b с радиусами шайб при соударении.

Но прежде всего найдём радиус второй шайбы:

$$m = h \cdot \pi R_1^2 \cdot \rho_1 = h \cdot \pi R_2^2 \cdot \rho_2,$$

откуда

$$R_2 = R_1 \sqrt{\frac{\rho_1}{\rho_2}} = 2R_1.$$

Это соотношение радиусов учтено на рисунке 20.

Силовое воздействие $\vec{F}\Delta t$ на вторую шайбу направлено по линии центров. Это же направление, согласно закону Ньютона, имеет вектор $\Delta\vec{p}$. Выполнив построение треугольника

$$\vec{p}_2' = \vec{p}_2 + \Delta\vec{p}$$

точно так же, как в предыдущей задаче, и отметив все углы, равные α, находим угол отклонения φ скорости второй (а значит, и первой) шайбы:

$$\varphi = 180^\circ - 2\alpha.$$

Угол α легко находится из прямоугольного треугольника AOO' (см. рис. 20), в котором гипотенуза $OO' = R_1 + R_2 = R_1 + 2R_1 = 3R_1$, а катет $OA = b = 1{,}5R_1$. Значит, угол $\alpha = 30^\circ$.

Таким образом, угол отклонения скорости шайбы после соударения

$$\varphi = 180^\circ - 2 \cdot 30^\circ = 120^\circ.$$

Ответ. $\varphi = 120^\circ$.

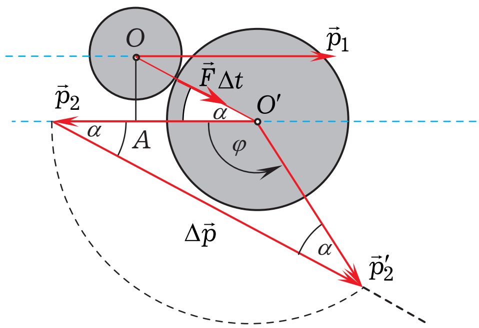

Рис. 20

Надеемся, что эта статья окажется полезной для развития физического мышления школьника, с интересом осваивающего курс физики.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Здесь пожарники заниматься будут

Однажды за две минуты до начала семинара Л.Д. Ландау на пороге зала, в который он только что вошёл, появился пожарник и громко объявил:

– Давайте уходите, ребята, – здесь пожарники заниматься будут.

– Безобразие! – возмутились собравшиеся на семинар физики-теоретики и толпой направились отстаивать свои права на зал.

Тут «пожарник» снял каску и усы. Им оказался академик Аркадий Бейнусович Мигдал, который любил разного рода шутки и розыгрыши. Их ценили и другие участники семинара Ландау – они весело порадовались такому исходу «конфликта».