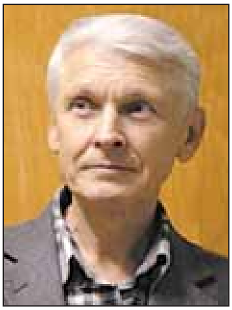

Чивилёв Виктор Иванович
Кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей физики Московского физико-технического института (МФТИ). Заслуженный работник высшей школы, заместитель председателя научно-методического совета Федеральной заочной физико-технической школы (ФЗФТШ) при МФТИ, член жюри Всероссийской олимпиады школьников по физике.

Выбор осей для записи векторных уравнений в проекциях при решении задач

Высказано утверждение, что при решении задач по физике, связанных с записью векторных уравнений в проекциях, оси выбираются из соображений удобства. Обоснование и полезность этого утверждения показаны на примерах решения задач. Даны рекомендации по выбору осей.

1. Некоторые свойства векторных равенств

Векторное равенство можно записать в проекциях на любое выбранное направление в пространстве, т.е. на ось. Это математическая операция. Например, равенство

$$3\vec{a} = 7\vec{b} - 2\vec{c},$$

записанное в проекциях на произвольную ось x, имеет вид:

$$3a_x = 7b_x - 2c_x.$$

Здесь a_x, b_x, c_x – проекции (координаты) векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ на ось x.

Любое векторное равенство для векторов, не лежащих в одной плоскости (трёхмерный случай), эквивалентно трём скалярным, записанным в проекциях на любые три оси, не лежащие в одной плоскости и не параллельные. При этом оси не обязательно взаимно перпендикулярны. Например, векторное равенство

$$4\vec{a} - 5\vec{b} = 3\vec{c}$$

эквивалентно трём скалярным равенствам, записанным в проекциях на оси x, y, z:

$$4a_x - 5b_x = 3c_x,$$
$$4a_y - 5b_y = 3c_y,$$
$$4a_z - 5b_z = 3c_z.$$

Здесь оси x, y, z не лежат в одной плоскости, не параллельны и не обязательно взаимно перпендикулярны. Три записанных скалярных равенства независимы, т.е. каждое из них нельзя получить из двух оставшихся. Если записать векторное равенство в проекциях на произвольную четвёртую ось, то получится равенство, являющееся следствием из предыдущих трёх. Поэтому говорят, что из векторного равенства в трёхмерном случае можно получить только три независимых скалярных, записанных в проекциях на три оси в пространстве.

Если все векторы из векторного равенства лежат в одной плоскости P (двумерный случай), то это векторное равенство эквивалентно двум скалярным, записанным в проекциях на любые две оси, лежащие в этой плоскости P, но не параллельные и не обязательно взаимно перпендикулярные. Например, векторное равенство в двумерном (плоском) случае

$$\vec{F}+3\vec{Q}=2\vec{N}$$

эквивалентно двум скалярным:

$$F_x+3Q_x=2N_x,$$

$$F_y+3Q_y=2N_y.$$

Здесь оси x, y не параллельны, не обязательно взаимно перпендикулярны и лежат в плоскости P нахождения векторов $\vec{F}$, $\vec{Q}$ и $\vec{N}$. Запись последнего векторного равенства в проекциях на произвольную третью ось в плоскости P даст равенство, являющееся следствием двух равенств, записанных в проекциях на оси x и y. Поэтому говорят, что из векторного равенства в двумерном случае можно получить только два независимых скалярных равенства (записанных в проекциях на две оси).

Векторное равенство для векторов, направленных вдоль одной прямой (одномерный случай), эквивалентно одному скалярному равенству, записанному в проекциях на ось, направленную вдоль этой прямой. Например, векторное равенство в одномерном случае

$$3\vec{R}-5\vec{F}=8\vec{Q}$$

эквивалентно одному скалярному, записанному в проекциях на ось x, направленную параллельно прямой, вдоль которой направлены векторы $\vec{R}$, $\vec{F}$ и $\vec{Q}$:

$$3R_x-5F_x=8Q_x.$$

Если записать последнее векторное равенство в проекциях на другую ось (направленную против оси x), то не получим нового независимого равенства, получим следствие равенства, записанного в проекциях на ось x.

2. Примеры решения задач

При решении задач из разных разделов физики часто требуется записать векторное равенство в проекциях на оси. Их можно выбирать произвольно. Но от выбора осей зависит объём математических преобразований, а иногда и сама возможность получить ответ. Поэтому можно сформулировать утверждение: *оси для записи векторных равенств в проекциях при решении задачи выбираются из соображений удобства.*

Приведём конкретные примеры.

Задача 1. По наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α скользит прямолинейно брусок. Коэффициент трения скольжения между бруском и наклонной плоскостью μ. Найти ускорение бруска.

Анализ. На брусок массой m действуют со стороны наклонной плоскости сила нормального давления $\vec{N}$ и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$, а со стороны Земли – сила тяжести $m\vec{g}$ (рис. 1). Заметим, что $F_{\text{тр}}=\mu N$. По второму закону Ньютона

$$m\vec{g}+\vec{N}+\vec{F}_{\text{тр}}=m\vec{a}.$$

Здесь $\vec{a}$ – ускорение бруска.

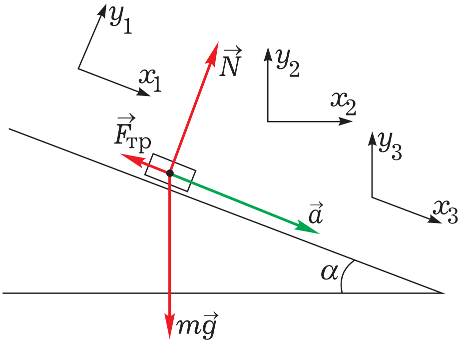

Рис. 1

Имеем двумерный случай, поскольку все векторы лежат в одной вертикальной плоскости. Дальнейшее решение проведём тремя способами.

Первый способ решения. Запишем векторное уравнение второго закона Ньютона в проекциях на параллельную наклонной плоскости ось x_1 и перпендикулярную ей ось y_1 (рис. 1):

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - \mu N = ma, \\ -mg\cos\alpha + N = 0. \end{cases}$$

Решив систему из двух уравнений с двумя неизвестными N и a, находим ускорение:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Второй способ решения. Запишем векторное уравнение в проекциях на горизонтальную ось x_2 и вертикальную ось y_2:

$$\begin{cases} N\sin\alpha - \mu N\cos\alpha = ma\cos\alpha, \\ -mg + N\cos\alpha + \mu N\cos\alpha = -ma\sin\alpha. \end{cases}$$

Получили опять систему из двух уравнений с двумя неизвестными N и a, но теперь в каждом уравнении содержатся две неизвестные. Выразив из первого уравнения N через a и подставив во второе уравнение, получим после упрощений прежний ответ:

$$a = g(\sin\alpha - \mu\cos\alpha).$$

Третий способ решения. Направим ось x_3 параллельно наклонной плоскости, а ось y_3 – вертикально. Векторное уравнение второго закона Ньютона в проекциях на эти оси:

$$\begin{cases} mg\sin\alpha - \mu N = ma, \\ -mg + N\cos\alpha + \mu N\sin\alpha = -ma\sin\alpha. \end{cases}$$

Решив эту систему уравнений, находим ускорение.

Выводы и рекомендации. Третий способ решения подтверждает, что оси можно брать не только взаимно перпендикулярные, но и направленные друг к другу под острым или тупым углом.

Наиболее удачно оси выбраны в первом способе решения.

Интересно отметить, что при любом выборе осей получить в этой задаче можно только два независимых уравнения. Например, уравнение для оси x_3 можно получить, умножив уравнения для оси x_1 на $\cos\alpha$, а уравнение для оси y_1 – на $\sin\alpha$, и сложив эти уравнения. Поэтому брать больше двух осей и составлять более двух уравнений в двумерной (плоской) задаче не стоит, поскольку решение переполненной системы уравнений может привести к ситуации, когда получится $0 = 0$, что вызывает замешательство у решающего из-за «пропажи» неизвестных в уравнении.

И ещё одно замечание, относящееся ко всем разбираемым здесь задачам. Часто при проецировании векторов удобно переносить оси параллельно самим себе и проводить их через центр масс тела. Это действие опускается в решениях всех предлагаемых ниже задач, чтобы не загромождать рисунки.

Задача 2. Шар массой $m = 0{,}6$ кг удерживается двумя нитями, прикреплёнными к потолку и стене (рис. 2).

Одна нить горизонтальна, другая составляет угол $\alpha = 60^\circ$ с поверхностью потолка. Найти силы натяжения нитей.

Анализ. На шар действуют сила тяжести $m\vec{g}$ и силы натяжения нитей $\vec{F}_1$ и $\vec{F}_2$ (рис. 2).

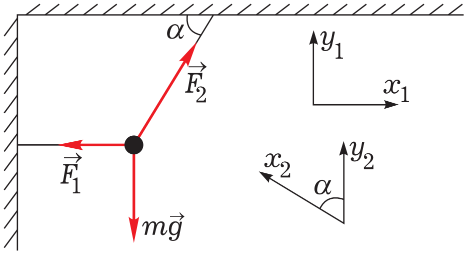

Рис. 2

Запишем условие равновесия шара:

$$m\vec{g} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0.$$

Имеем двумерный (плоский) случай, так как все векторы лежат в одной вертикальной плоскости.

Первый способ решения. Запишем векторное уравнение в проекциях на горизонтальную ось x_1 и вертикальную ось y_1:

$$\begin{cases} -F_1 + F_2\cos\alpha = 0, \\ -mg + F_2\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Решая эту систему уравнений относительно F_1 и F_2, получаем силы натяжения нитей:

$$\begin{cases} F_1 = mg\,\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{mg}{\sqrt{3}} \approx 3{,}4\ \text{Н}, \\ F_2 = \dfrac{mg}{\sin\alpha} = \dfrac{2mg}{\sqrt{3}} \approx 6{,}8\ \text{Н}. \end{cases}$$

Второй способ решения. Направим ось x_2 перпендикулярно силе $\vec{F}_2$, а ось y_2 – перпендикулярно силе $\vec{F}_1$. Этим будет обеспечено то, что в каждом уравнении в проекциях на эти оси останется только по одной неизвестной силе:

$$\begin{cases} -mg\cos\alpha + F_1\sin\alpha = 0, \\ -mg + F_2\sin\alpha = 0. \end{cases}$$

Из первого уравнения системы находим F_1, из второго F_2.

Выводы и рекомендации. Решение этой задачи ещё раз показывает, что в «плоском» случае для получения независимых уравнений в проекциях можно выбирать любые две не параллельные оси, причём оси могут быть и не взаимно перпендикулярными.

В этой задаче сложно сказать, какой способ решения легче, поскольку в первом способе тяжесть решения перенесена на решение системы уравнений, а во втором – на умение правильно записать проекции векторов.

Анализ второго способа решения приводит к следующему полезному выводу. *Если направить ось перпендикулярно какому-либо вектору (например, неизвестному), то его проекция не войдёт в соответствующее уравнение.*

Задача 3. Клин двигают по столу с постоянным горизонтально направленным ускорением a (рис. 3).

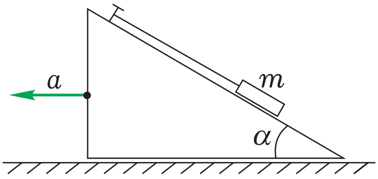

Рис. 3

На гладкой поверхности клина, наклонённой под углом α к горизонту, находится брусок массой m. Брусок удерживается на поверхности клина нитью, прикреплённой к гвоздю. Найти силу натяжения нити.

Анализ. На брусок действуют Земля с силой тяжести $m\vec{g}$, клин с силой нормального давления $\vec{N}$ и нить с силой натяжения $\vec{T}$ (рис. 4). Ускорение бруска относительно стола равно ускорению клина. Запишем уравнение второго закона Ньютона для бруска в инерциальной системе отсчёта, связанной со столом:

$$m\vec{g}+\vec{N}+\vec{T}=m\vec{a}.$$

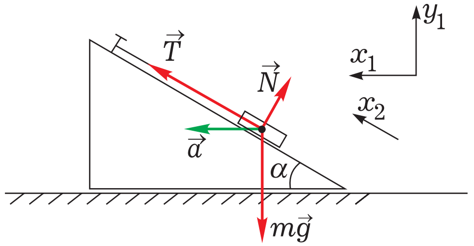

Рис. 4

Первый способ решения. Запишем векторное уравнение в проекциях на горизонтальную ось x_1 и вертикальную ось y_1:

$$\begin{cases}-N\sin\alpha+T\cos\alpha=ma,\\ -mg+N\cos\alpha+T\sin\alpha=0.\end{cases}$$

Имеем систему из двух уравнений с двумя неизвестными T и N. Решая систему, находим

$$T=m(g\sin\alpha+a\cos\alpha).$$

Второй способ решения. Воспользуемся выводом (рекомендацией) из задачи 2. Направим ось x_2 перпендикулярно неизвестному вектору $\vec{N}$. Запишем векторное уравнение в проекциях на эту ось:

$$-mg\sin\alpha+T=ma\cos\alpha.$$

Отсюда сразу находим ответ:

$$T=m(g\sin\alpha+a\cos\alpha).$$

Выводы и рекомендации. Ясно, что второй способ существенно проще. Для нахождения неизвестной величины T удалось обойтись только одной осью. Запись векторного уравнения в проекциях на какую-нибудь вторую ось даст возможность найти и другую неизвестную величину N. Но если по условию задачи отыскание второй величины не требуется, то второе уравнение можно не записывать.

Задача 4. Платформа вращается с угловой скоростью ω вокруг вертикального стержня (рис. 5). На горизонтальной поверхности платформы находится шарик массой m, прикреплённый к стержню нитью длиной l. Угол между нитью и стержнем равен α. Найти силу давления шарика на платформу. Шарик вращается вместе с платформой и не отрывается от неё.

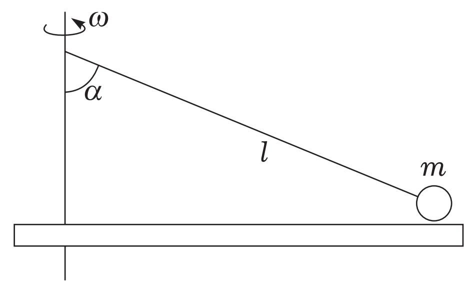

Рис. 5

Анализ. На шарик действуют сила тяжести $m\vec{g}$ со стороны Земли, сила давления $\vec{N}$ со стороны платформы и сила натяжения нити $\vec{F}$ со стороны нити (рис. 6). По третьему закону Ньютона шарик и платформа давят друг на друга с противоположно направленными и равными по модулю силами N. Шарик движется в

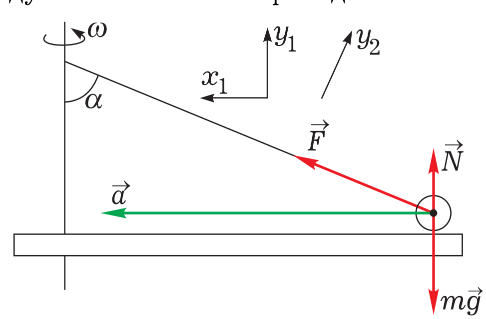

Рис. 6

горизонтальной плоскости по окружности радиусом $R = l\sin\alpha$ с направленным к оси вращения (стержню) ускорением $a = \omega^2 R = \omega^2 l\sin\alpha$.

По второму закону Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Первый способ решения. Запишем векторное уравнение в проекциях на горизонтальную ось x_1 и вертикальную ось y_1 (рис. 6):

$$\begin{cases} F\sin\alpha = ma, \\ -mg + N + F\cos\alpha = 0. \end{cases}$$

Решая систему уравнений с учётом выражения для a, находим силу давления:

$$N = mg - m\omega^2 l\cos\alpha.$$

Второй способ решения. Воспользуемся рекомендацией из задачи 2. Направим ось y_2 перпендикулярно неизвестному вектору $\vec{F}$ (рис. 6). Запишем в проекциях на эту ось векторное уравнение:

$$-mg\sin\alpha + N\sin\alpha = -ma\cos\alpha.$$

С учётом выражения для a находим

$$N = mg - m\omega^2 l\cos\alpha.$$

Выводы и рекомендации. В этой задаче, как и в задаче 2, трудно сказать, какой из способов решения проще. Сложность математических преобразований из-за решения системы уравнений в первом способе компенсируется несколько большей сложностью при проецировании векторов во втором способе. В таком случае, что привычнее, то и проще.

Задача 5. На брусок массой m, находящийся на гладкой наклонной плоскости с углом наклона к горизонту α, действуют с постоянной горизонтальной силой F (рис. 7). Найти силу давления бруска на наклонную плоскость.

Анализ и решение. В зависимости от численных значений параметров задачи брусок может скользить вдоль наклонной плоскости вверх или вниз и даже покоиться. Отсюда делаем вывод, что ускорение бруска направлено вверх или вниз вдоль наклонной плоскости или равно нулю. На рис. 8 показаны два возможных направления ускорения $\vec{a}$.

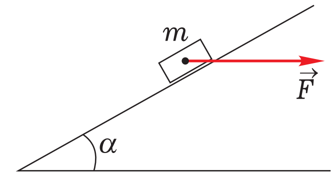

Рис. 7

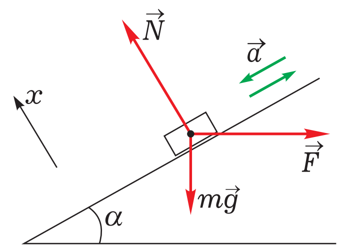

Рис. 8

Независимо от направления ускорения, на брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила нормального давления $\vec{N}$ со стороны наклонной плоскости и сила $\vec{F}$. По второму закону Ньютона

$$m\vec{g} + \vec{N} + \vec{F} = m\vec{a}.$$

Запишем это векторное равенство в проекциях на ось x, направленную перпендикулярно ускорению:

$$-mg\cos\alpha + N - F\sin\alpha = 0.$$

Отсюда

$$N = mg\cos\alpha + F\sin\alpha.$$

По третьему закону Ньютона с такой же (по модулю) силой N, но направленной противоположно вектору $\vec{N}$, действует брусок на наклонную плоскость. Заметим, что ответ не зависит от направления ускорения.

Выводы и рекомендации. Пусть в векторном равенстве есть вектор, для которого известна только прямая линия, вдоль которой он направлен, но неизвестно, в какую сторону. Тогда удобно записать векторное равенство в проекциях на ось, перпендикулярную этой линии. В полученном уравнении не будет «следов» этого вектора.

Задача 6. Два куска пластилина массами $m_1 = 0{,}1$ кг и $m_2 = 0{,}15$ кг движутся навстречу друг другу вдоль одной прямой со скоростями $v_1 = 8$ м/с и $v_2 = 6$ м/с. В результате удара куски слипаются. Найти скорость слипшихся кусков (указать модуль и направление). Внешними силами пренебречь.

Анализ и решение. Пусть для определённости куски пластилина движутся перед ударом так, как показано на рис. 9.

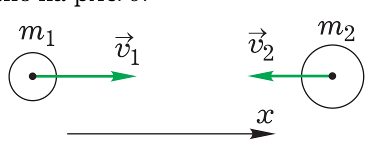

Рис. 9

По закону сохранения импульса

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{u}.$$

Здесь $\vec{u}$ – искомая скорость слипшихся кусков.

Ясно, что вектор $\vec{u}$ направлен вдоль линии движения кусков перед ударом. Но сказать, в какую сторону он направлен, без дополнительного исследования затруднительно. Запишем векторное уравнение в проекциях на ось x, направленную в ту же сторону, что и вектор $\vec{v}_1$:

$$m_1 v_1 - m v_2 = (m_1 + m_2)u_x.$$

Отсюда находим проекцию на ось x скорости $\vec{u}$:

$$u_x = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2} = -0{,}4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Проекция получилась отрицательной. Это означает, что слипшиеся куски движутся в отрицательном направлении оси x, т.е. в направлении, противоположном направлению скорости первого куска $\vec{v}_1$ до удара. Модуль скорости слипшихся кусков

$$u = |u_x| = 0{,}4\ \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Выводы и рекомендации. Иногда надо найти вектор (векторную величину), для которого известно, вдоль какой прямой линии он направлен, но неизвестно, в какую сторону. Тогда удобно записать векторное равенство в проекциях на ось x, направленную вдоль этой линии. Затем следует найти проекцию искомого вектора на ось x и интерпретировать полученный результат.

Задача 7. На гладком горизонтальном столе находится клин массой $M = 2$ кг с углом наклона верхней поверхности к горизонту $\alpha = 30^\circ$ (рис. 10). На брусок массой $m = 1$ кг,

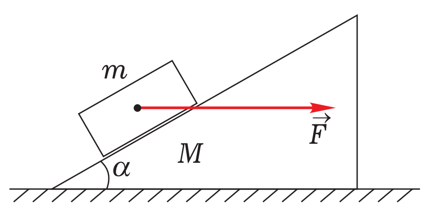

Рис. 10

находящийся на клине, действует постоянная горизонтальная сила $F = 6{,}4$ Н. В результате клин и брусок движутся поступательно по столу, не изменяя взаимного расположения. Найти силу трения, действующую на брусок (указать модуль и направление).

Анализ и решение. Из второго закона Ньютона в применении к системе клин – брусок можно показать, что общее ускорение бруска и клина сонаправлено с силой $\vec{F}$ и равно

$$a=\frac{F}{M+m}.$$

На брусок действуют сила тяжести $m\vec{g}$, сила $\vec{F}$, сила нормального давления $\vec{N}$ со стороны клина и сила трения $\vec{F}_{\text{тр}}$ тоже со стороны клина (рис. 11). Причём сила трения является силой трения покоя и направлена вдоль поверхности клина, т.е. вдоль оси x. Сказать же, в какую сторону (вверх или вниз) направлен вектор $\vec{F}_{\text{тр}}$, без дополнительного исследования затруднительно. Два возможных направления силы трения показаны на рис. 11.

По второму закону Ньютона для бруска

$$m\vec{g}+\vec{F}+\vec{N}+\vec{F}_{\text{тр}}=m\vec{a}.$$

Воспользуемся рекомендацией из предыдущей задачи 6. Запишем это векторное уравнение в проекциях на ось x:

$$mg\sin\alpha-F\cos\alpha+F_{\text{тр}x}=-ma\cos\alpha.$$

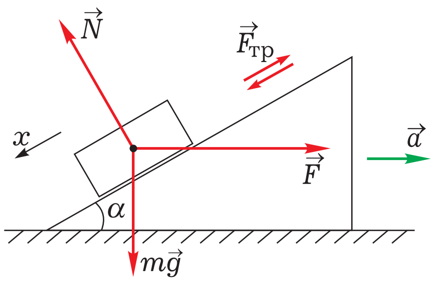

Рис. 11

Отсюда проекция силы трения на ось x

$$F_{\text{тр}x}=F\cos\alpha-m(g\sin\alpha+a\cos\alpha).$$

С учётом выражения для ускорения a

$$F_{\text{тр}x}=\frac{M}{M+m}F\cos\alpha-mg\sin\alpha\approx-1{,}2\ \text{Н}.$$

Проекция получилась отрицательной. Из этого следует, что сила трения, действующая на брусок, направлена против положительного направления оси x, т.е. вверх. Модуль силы трения $F_{\text{тр}}=\left|F_{\text{тр}x}\right|=1{,}2$ Н.

Выводы и рекомендации. Неопределённость в направлении силы трения в этой задаче затрудняет запись уравнений в проекциях на оси, отличные от оси x. Поэтому применение в данной задаче рекомендаций из задачи 6 очень полезно.

Задача 8. Камень бросают со скоростью v_0 под углом β к поверхности горы, составляющей угол α с горизонтом (рис. 12). На какое максимальное расстояние от поверхности горы удалится камень за время полёта?

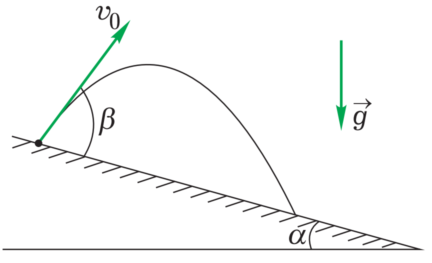

Рис. 12

Анализ и решение. Камень движется равноускоренно с ускорением $\vec{g}$ и начальной скоростью $\vec{v}_0$. Его скорость $\vec{v}$ и перемещение $\vec{S}$ в любой момент времени t определяются уравнениями:

$$\vec{v}=\vec{v}_0+\vec{g}t,$$

$$\vec{S}=\vec{v}_0t+\frac{\vec{g}t^2}{2}.$$

Запишем эти уравнения в проекциях на произвольную ось x (направленную под произвольным углом к вертикали):

$$v_x=v_{0x}+g_xt,$$
$$S_x=v_{0x}\,t+\frac{g_xt^2}{2}. \qquad (1)$$

Здесь v_x, v_{0x}, g_x и S_x – проекции на ось x соответствующих векторов. Исключая из двух последних уравнений время t, получаем

$$v_x{}^2 - v_{0x}{}^2 = 2g_xS_x. \qquad (2)$$

Теперь подберём удобную ось x (или оси) для ответа на вопрос задачи. Точка A максимального удаления характерна тем, что скорость камня в ней направлена вдоль поверхности горы (рис. 13). Следовательно, проекция скорости камня в точке A на направление нормали к поверхности горы равна нулю. Это наводит на мысль, что ось x для записанных в проекциях уравнений (1) и (2) удобно взять перпендикулярной к поверхности горы.

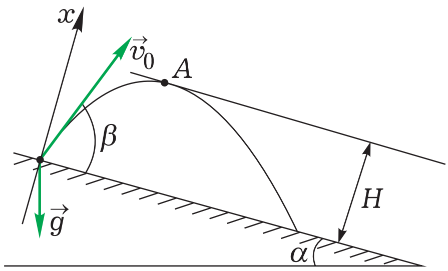

Рис. 13

В этом случае

$$v_{0x} = v_0\sin\beta,\ g_x = -g\cos\alpha,$$

и уравнение (2) принимает вид:

$$v_x{}^2 - (v_0\sin\beta)^2 = 2(-g\cos\alpha)S_x.$$

Для точки A $v_x = 0$, $S_x = H$. Имеем

$$-(v_0\sin\beta)^2 = 2(-g\cos\alpha)H.$$

Отсюда максимальное расстояние от поверхности горы, на которое удалится камень,

$$H = \frac{v_0^2\sin\beta}{2g\cos\alpha}.$$

Выводы и рекомендации. Заметим, что нам удалось в двумерной (плоской) задаче легко получить ответ, притом с помощью только одной оси.

Напомним, что уравнения (1) и (2) записаны для произвольной оси x, а не только для изображённой на рис. 13. Применение этих уравнений для осей, отличных от изображённой на рис. 13, вызовет почти непреодолимые математические проблемы при решении данной задачи. Попробуйте, например, решить эту задачу, выбрав горизонтальную и вертикальную оси.

Приведённое решение лишний раз показывает, что оси при решении конкретной задачи выбираются из соображений удобства.

Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор Юмор

Поиск поиску рознь

О рассеянности Андре Мари Ампера до сих пор ходят легенды. Однажды бравший у него интервью репортёр спросил:

– Верно ли, что Вы всегда в поиске?

– И не говорите! – пожаловался учёный. – Иногда целый день потратишь, чтобы найти эти проклятые очки. А они, как всегда, оказываются на лбу... Вот и сегодня с самого утра не могу их найти.